MECÁNICA CLÁSICA

Prof. Jorge Rojo Carrascosa

www.profesorjrc.es

1. **CINEMÁTICA**
2. **DINÁMICA**
3. **ENERGÍA Y TRABAJO**
4. **DINÁMICA DE ROTACIÓN**

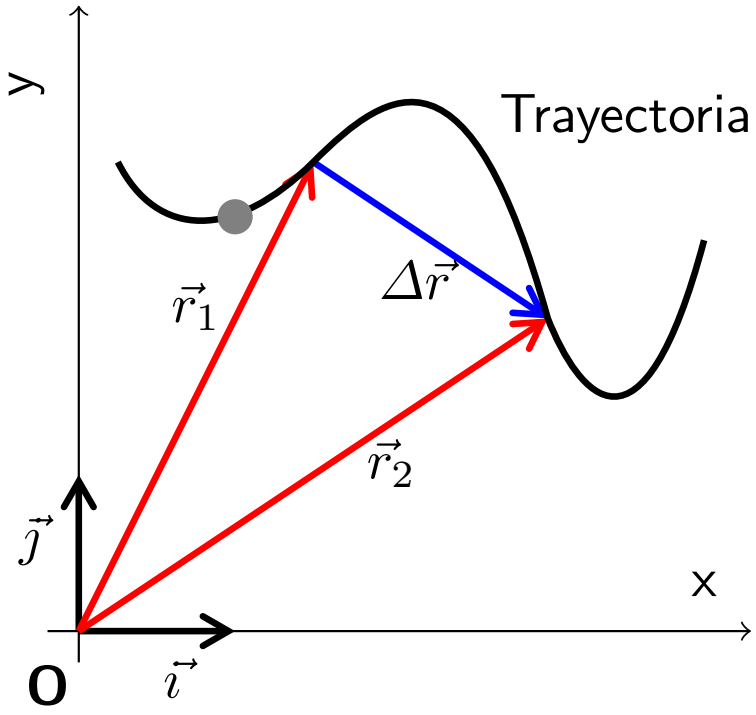
CINEMÁTICA

Prof. Jorge Rojo Carrascosa

www.profesorjrc.es

Elementos para describir el movimiento

1. Sistema de Referencia (inerciales o no) $\Longrightarrow$ Ejes cartesianos
2. **Vector** de posición, $\vec{r} = \vec{r}(t) \rightarrow \vec{r}(t) = (x(t)\vec{\imath}, y(t)\vec{\jmath}, z(t)\vec{k})$
3. **Vector** desplazamiento, $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$
4. Trayectoria, $\sum_i \vec{r}_i$
5. Distancia o espacio recorrido, $[s] = L = m$



Velocidad, $[v] = \frac{L}{T} = \frac{m}{s}$

Velocidad Media

Es una magnitud vectorial que expresa el desplazamiento que experimenta un móvil en la unidad de tiempo, tiene la misma dirección y sentido que el desplazamiento.

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{desplazamiento}{intervalo\ tiempo} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$

Velocidad Instantánea

Magnitud vectorial que mide la rapidez con la que se produce el movimiento en un instante dado. La dirección es siempre tangente a la trayectoria y su sentido coincide con el del movimiento.

$$\vec{v}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{dr(t)}{dt} \to \vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$$

$$\boxed{|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

Aceleración, $[a] = \frac{L}{T^2} = \frac{m}{s^2}$

Aceleración Media

Es la magnitud vectorial que mide la rapidez con la que cambia de velocidad un móvil en un intervalo de tiempo.

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{intervalo\ velocidad}{intervalo\ tiempo} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}}$$

Aceleración Instantánea

Es la magnitud vectorial que mide la rapidez con la que cambia de velocidad un móvil (en valor y en dirección) y la dirección en la que se produce ese cambio.

$$\vec{a}_i = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2r(t)}{dt^2} \rightarrow \vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))$$

$$\boxed{|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Componentes intrinsecas de la aceleración

En un punto dado de un movimento, $\vec{v} = v\vec{u}_T$ y la aceleración,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv\vec{u}_T}{dt} = \frac{v^2}{R}\vec{u}_N + \frac{dv}{dt}\vec{u}_T \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}}$$

Aceleración Tangencial

La aceleración tangencial da cuenta del cambio en el módulo de la velocidad

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt}}$$

Aceleración normal

La aceleración normal da cuenta del cambio de dirección en la velocidad

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R}}$$

Donde R es el radio de la curva y v el modulo de la velocidad.

Movimientos de especial interes

- **RECTILINEOS** (Trayectoria es una recta)
  - Movimiento Rectilineo Uniforme (MRU)
  - Movimiento Rectilineo Uniformemente Acelerado (MRUA)
  - Caida libre
- **CIRCULARES** (Trayectoria es una circunferencia)
  - Movimiento Circular Uniforme, (MCU)
  - Movimiento Circular Uniformemente Acelerado, (MCUA)
- **COMPUESTOS**
- **PROYECTILES**
  - Tiro horizontal
  - Tiro Oblicuo o , Parabólico
- **MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE, MAS**

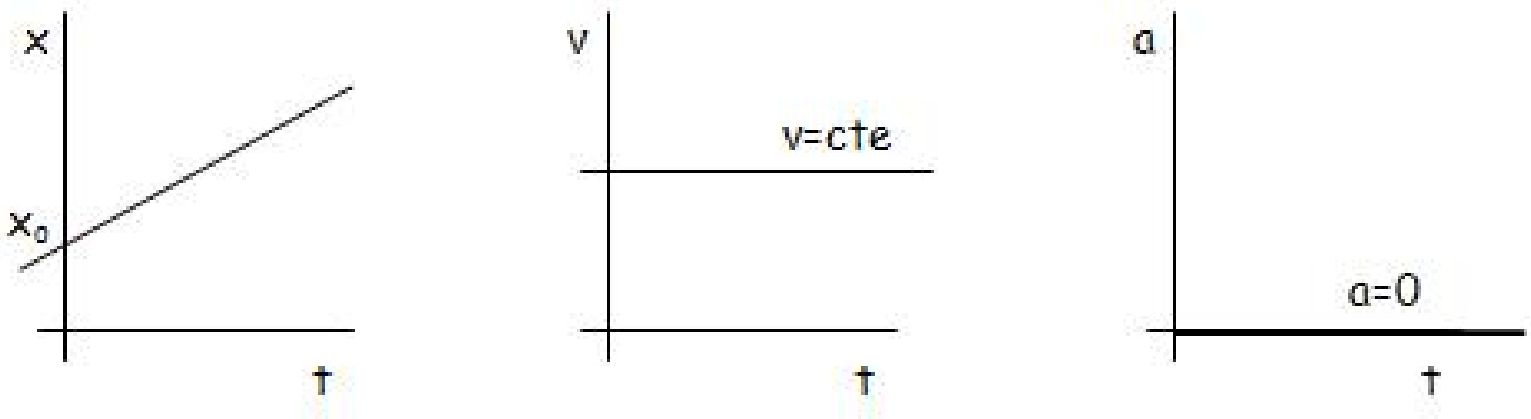
Movimiento Rectilineo uniforme (MRU)

- Trayectoria a lo largo de una recta
- No existe aceleración
- La velocidad se mantiene constante, $v_m = v_i$

ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO

$$\boxed{s_t = s_0 + vt}$$

DIAGRAMAS DEL MOVIMIENTO



Movimiento Rectilineo uniformemente acelerado (MRUA)

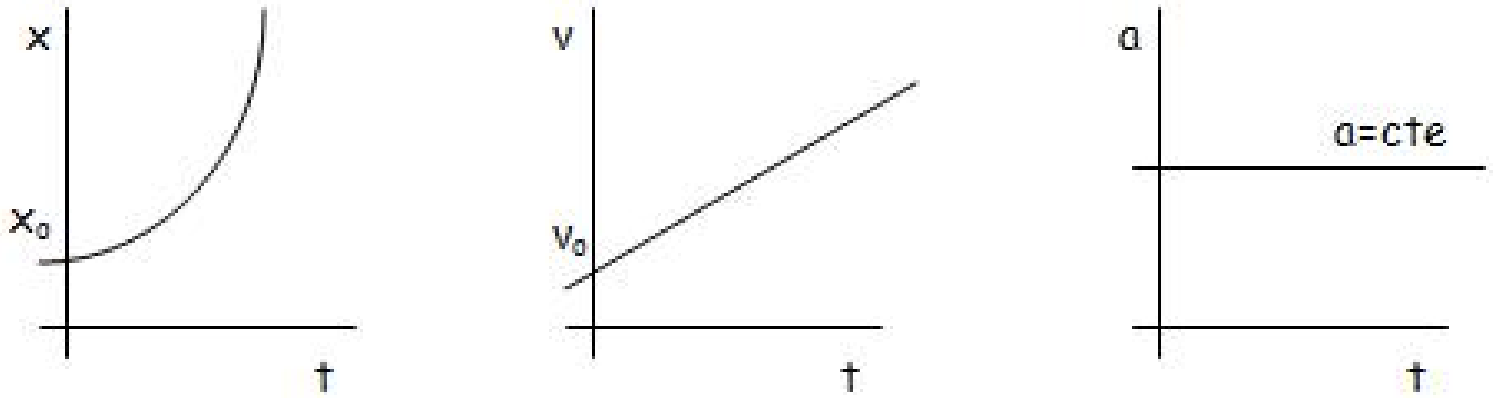
- Trayectoria a lo largo de una recta
- La velocidad varia a lo largo de la trayectoria
- La aceleración se mantiene constante, $a_m = a_i$

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

$$\boxed{v_t = v_0 + at} \qquad \boxed{s_t = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$

$$\boxed{v_t^2 = v_0^2 + 2a(s_t - s_0)}$$

DIAGRAMAS DEL MOVIMIENTO



Caida libre, MRUA con a=g

- Trayectoria a lo largo de una recta, eje y.
- Se desprecia la acción por rozamiento con el aire
- La velocidad es positiva si el cuerpo sube (tiro vertical) y negativa sin el cuerpo baja (caida libre).
- La aceleración se mantiene constante. Es la aceleración de la gravedad, $g = -9,8\ \frac{m}{s^2}$. LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD SIEMPRE ES NEGATIVA.

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

$$\boxed{v_t = v_0 + gt}$$

$$\boxed{s_t = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2}$$

$$\boxed{v_t^2 = v_0^2 + 2g(s_t - s_0)}$$

Magnitudes Angulares

Espacio Angular, $\varphi,\ [\varphi] = radianes$

La trayectoria es una circunferencia (radio R), $\Longrightarrow$ **ángulos**

$$\boxed{\varphi = \frac{s}{R} \quad \Longrightarrow \quad s = \varphi R}$$

Velocidad Angular, $\omega,\ [\omega] = \frac{rad}{s}\ o\ rpm$

Se define como el ángulo recorrido en la unidad de tiempo

$$\boxed{\omega = \frac{\varphi}{t} \quad \Longrightarrow \quad v = \omega R}$$

Aceleración Angular, $\alpha,\ [\alpha] = \frac{rad}{s^2}$

Consecuencia del cambio de la velocidad angular, ω, en el movimiento

Movimiento Circular Uniforme, (MCU)

- La trayectoria es una circunferencia de radio R.
- La velocidad angular es constante
- Solo existe aceleración normal, $a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$
- Se define el periodo como T

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v}}$$

- Se define la frecuencia como f

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega t \quad \Longrightarrow \quad s = s_0 + vt}$$

Movimiento Circular Uniformemente Acelerado, (MCUA)

- La trayectoria es una circunferencia de radio R.
- La velocidad angular **no** es constante
- Existe aceleración angular constante, α
- Aparecen las dos componentes intrinsecas de la aceleración,

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R} \qquad a_t = \alpha R}$$

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

$$\boxed{\omega_t = \omega_0 + \alpha t}$$

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2}$$

$$\boxed{\omega_t^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\varphi - \varphi_0)}$$

Movimientos Compuestos

El movimiento resultante se rige por el **principio de superposición**

Cualquier móvil sujeto simultáneamente a varios movimientos elementales independientes da lugar a un movimiento resultante suma de los movimientos parciales

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

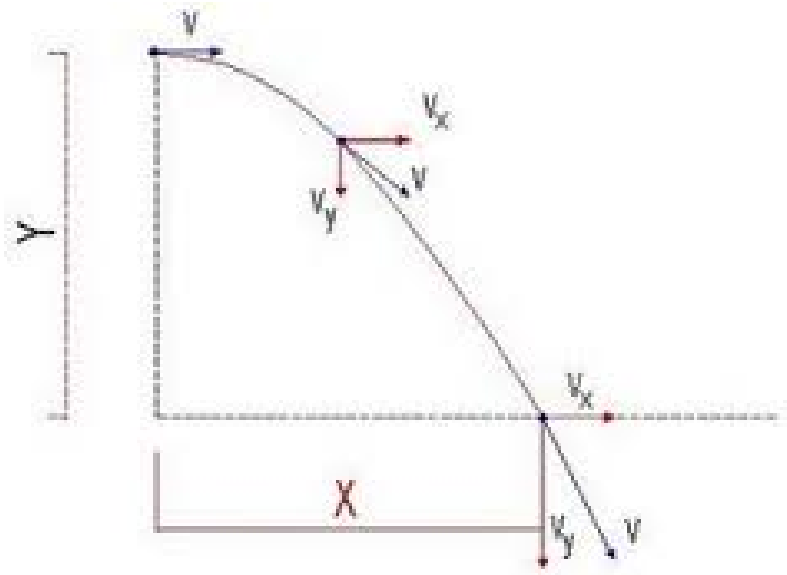
$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

Tiro Horizontal

- Se lanza un móvil horizontalmente desde una altura h y una velocidad v_0
- No existe rozamiento con el aire $\Rightarrow v_x = v_0$
- Verticalmente, el móvil sufre una caída libre, $g = -9,8\ \frac{m}{s^2}$

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

Movimiento horizontal	Movimiento vertical
$v_x = v_0$ $x = v_0 t$	$v_y = gt$ $y = y_0 + \frac{1}{2}gt^2$

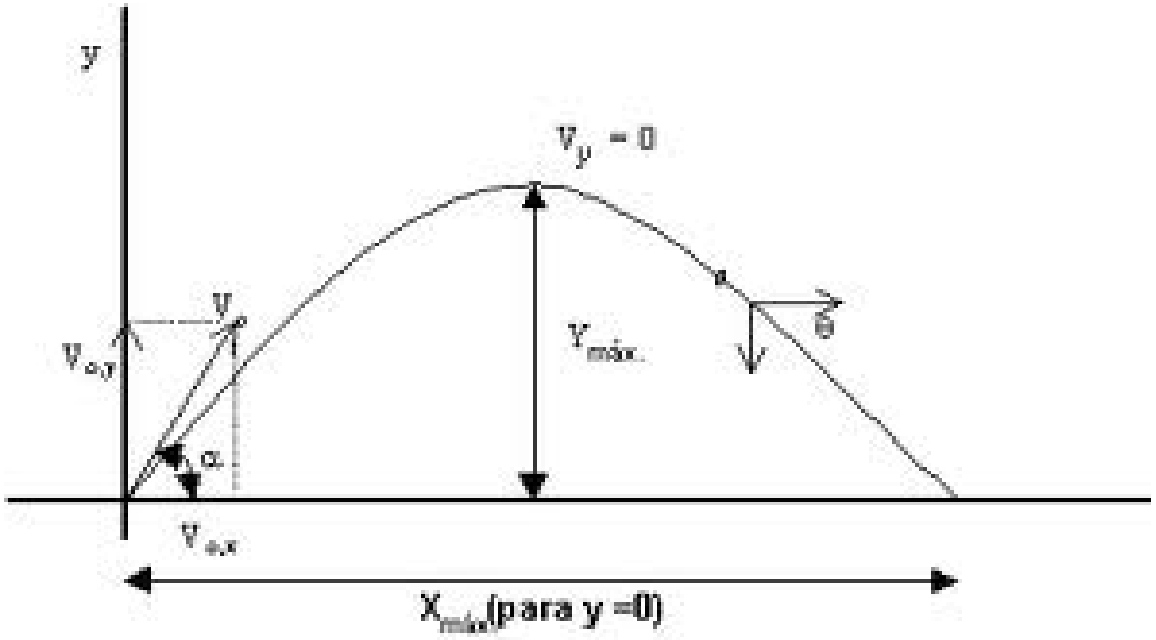


Tiro Oblicuo o Parabólico

- Se lanza un móvil formando un ángulo, α, con la horizontal
- No existe rozamiento con el aire
- Pueden pedir **alcance máximo**, **altura máxima**, **ec. trayectoria**,. . .

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

Movimiento horizontal	Movimiento vertical
$v_x = v_0 \cos\alpha$	$v_y = v_0 \sin\alpha + gt$
$x = v_0 \cos\alpha \; t$	$y = y_0 + v_0 \sin\alpha \; t + \frac{1}{2} g t^2$

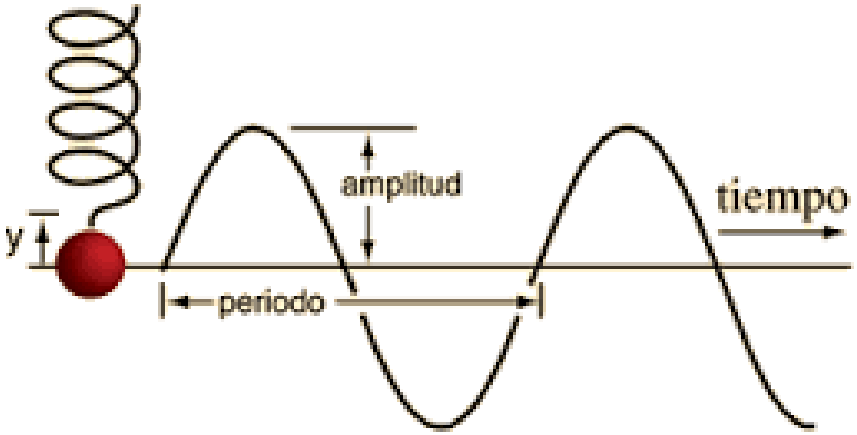


Movimiento Armónico Simple

- Movimiento Oscilatorio y Peródico $\Rightarrow$ Vibratorio
- No existe rozamiento con el medio

ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO

$$\boxed{x = A\sin(\omega t + \phi_0)}$$



Ecuación de velocidad	Ecuación de la aceleración
$v = A\omega\cos(\omega t + \phi_0)$	$a = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi_0)$
$v_{max} = A\omega$	$a_{max} = -A\omega^2$
$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$	$a = -\omega^2 x$

DINÁMICA

Prof. Jorge Rojo Carrascosa

www.profesorjrc.es

Leyes de Newton

La fuerza mide la intensidad de una interacción entre dos cuerpos

1. Primera Ley: Ley de Inercia *Todo cuerpo permanece en reposo o en movimiento rectilineo y uniforme si no influye ninguna fuerza sobre él*

2. Segunda Ley: Ley Fundamental de la dinámica

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}}$$

3. Tercera Ley: Ley de acción y reacción *cuando dos cuerpos interaccionan, se ejercen mutuamente fuerzas iguales y de sentidos opuestos*

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

Momento lineal e Impulso mecánico

Momento lineal, $\vec{p}$

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}} \qquad \Longrightarrow \qquad [p] = kg \cdot \frac{m}{s}$$

El primer principio queda redefinido como *El momento lineal de un cuerpo se mantiene constante*

Principio de conservación del momento lineal

El momento lineal de un sistema aislado, es decir, no sometido a fuerzas exteriores, permanece constante

$$\boxed{\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{despues}}$$

Impulso mecánico, $\vec{I}$

Se define como la variación del momento lineal

$$\boxed{\vec{I} = \vec{F}\Delta t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}$$

Tipos de Fuerzas I

1. El Peso, P: La fuerza con que la tierra atrae a los cuerpos $\boxed{P = mg}$
2. La Normal, N: F. $\perp$ a la superficie de contacto y dirigida hacía el cuerpo que ejerce la fuerza principal

$$\boxed{N = P = mg}$$

3. Fuerza de Rozamiento, F_r: F opuesta al movimiento de un cuerpo

$$\boxed{F_r = \mu N = \mu mg}$$

4. Fuerza Centrípeta, F_c: F. responsable del movimiento circular

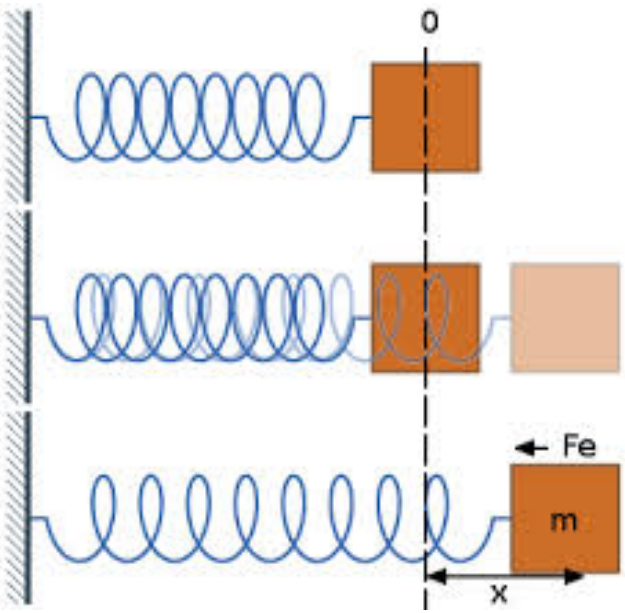
$$\boxed{F_c = ma_c = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R}$$

5. Fuerza Elástica, F_e: F. de tracción o compresión de un material elástico (Ley de Hooke)

$$\boxed{F = -k\Delta x}$$

6. Tensión, T: Aparece sobre cuerdas o cadenas sobre los que se realiza una fuerza.

Tipos de Fuerzas II. Oscilador Armónico Simple



Aplicando la 2ª Ley de Newton, la constante de recuperación del muelle queda,

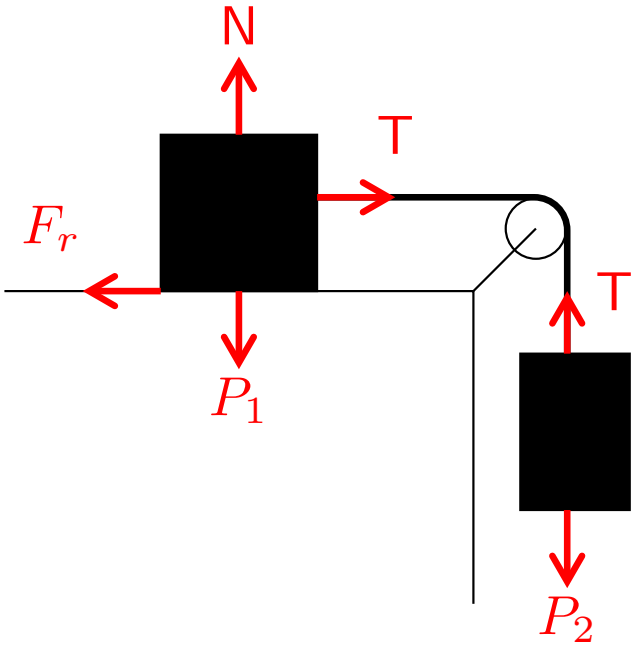
$$\Sigma F = ma \;\Rightarrow\; -kx = ma$$

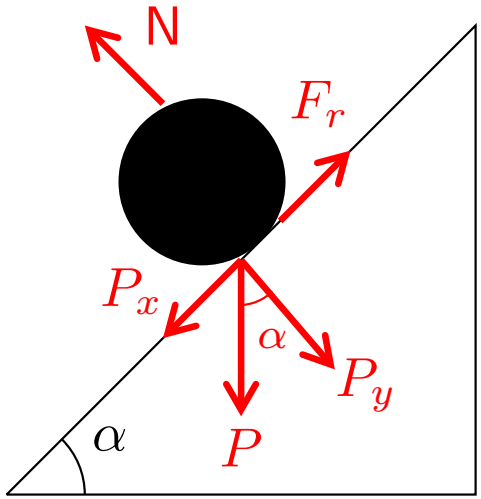
$$-kx = -m\omega^2 x \;\Rightarrow\; \boxed{k = m\omega^2}$$

y el periódo de las oscilaciones,

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Diagramas de fuerzas en sistemas dinámicos





1er cuerpo $\Rightarrow T - F_r = m_1 a$

2° cuerpo $\Rightarrow P_2 - T = m_2 a$

Eje x $\Rightarrow P_x - F_r = m a_x$

Eje y $\Rightarrow P_y - N = 0$

ENERGÍA Y TRABAJO

Prof. Jorge Rojo Carrascosa

www.profesorjrc.es

Definiciones

TRABAJO

La transformación que produce una fuerza, esto es, se habla de trabajo cuando una fuerza transmite una energía.

ENERGIA

Es la capacidad que posee un cuerpo para producir transformaciones sobre si mismo o sobre el entorno

$$\text{TRABAJO} \Leftrightarrow \text{ENERGIA}$$

MÁXIMA PRINCIPAL EN CIENCIAS

La energía total del Universo ni se crea ni se destruye, tan sólo se transforma. La energía total del universo se conserva.

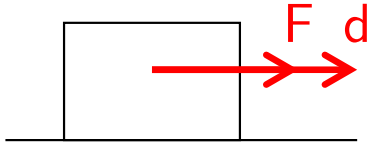
Trabajo mecánico, Julios (J)

- Si la Fuerza y el desplazamiento tienen la misma dirección:

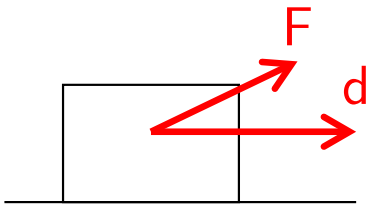
$$\boxed{W = F\Delta x = F(x_f - x_0)}$$

- Si la fuerza y el desplazamiento no tienen la misma dirección

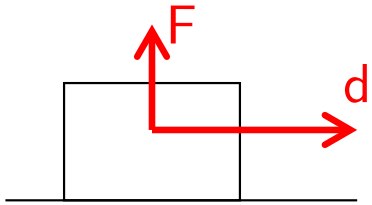
$$\boxed{W = F_x \Delta x = F\Delta x \cos\alpha}$$



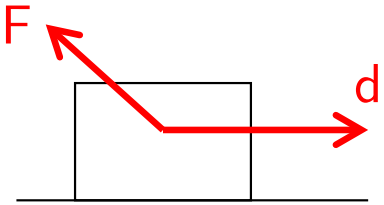
$\alpha = 0^o$
W máximo



$0 < \alpha < 90^o$
$W > 0$



$\alpha = 90^o$
W = 0



$90^o < \alpha < 180^o$
$W < 0$

Tipos de Energía

1. Energía Cinética, E_c: Energía debida al movimiento.

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$$

TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS

$$\boxed{W = \Delta E_c = E_{c2} - E_{c1}}$$

2. Energía potencial gravitatoria, E_p: Energía relacionada con la posición

$$\boxed{E_p = mgh} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{A\to B} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA})}$$

3. Fuerza potencial elástica, E_k: Energía debida a la compresión o dilatación de un cuerpo elástico.

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}kx^2}$$

Conservación de la Energía mecánica

PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

En un sistema aislado, en el que no hay rozamiento, la energía mecánica se conserva, es decir,la suma de las energías cinetica y potencial es constante.

$$\boxed{E_m = E_c + E_p}$$

$$\boxed{W = \Delta E_m = \Delta(E_c + E_p) = 0 \ \rightarrow \ E_m = cte}$$

Las fuerzas gravitatoria, electrostática y elastica son conservativas, las fuerzas de rozamiento **no**.

LEY DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

$$\boxed{\Delta E_m = W_{roz}}$$

La Energía total del universo se conserva.

Energía del oscilador armónico

ENERGÍA CINÉTICA

Depende de la posición, es periódica, máxima en la posición de equilibrio y mínima en los extremos.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t - \phi)$$

ENERGÍA POTENCIAL

Depende de la posición, es periódica, máxima en los extremos y mínima en la posición de equilibrio.

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t - \phi)$$

ENERGÍA MECÁNICA

No depende de la posición, depende de k y de la amplitud.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

POTENCIA

La potencia mide la eficacia de una máquina. Relaciona el trabajo que desarrolla ésta con el tiempo que tarda en realizarlo. Se mide en Watios (W)

$$\boxed{P = \frac{W}{t} = \frac{Fd}{t} = Fv_m}$$

RENDIMIENTO

Razón entre el trabajo útil y el trabajo realizado o consumido

$$\boxed{R(\%) = 100\frac{W_{util}}{W_{consumido}}} \qquad \boxed{R(\%) = 100\frac{P_{realizada}}{P_{consumida}}}$$

El Rendimiento no tiene dimensiones.

DINÁMICA DE ROTACIÓN

Prof. Jorge Rojo Carrascosa

www.profesorjrc.es

Momento de Inercia, I

Cuantifica su resistencia a cambiar su estado de giro.

Sólido Discreto

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Sólido Continuo

$$I = \int_v r^2 dm$$

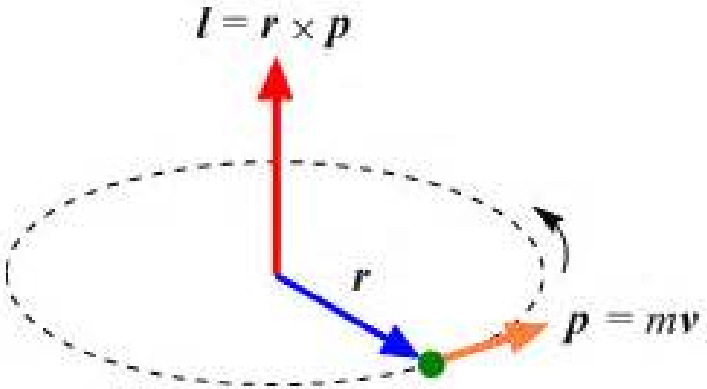
Sólido continuo	Momento de Inercia
Anillo (eje pasa por el centro y $\perp$)	$I = MR^2$
Disco (eje pasa por el centro y $\perp$)	$I = \frac{1}{2}MR^2$
Esfera maciza (eje pasa por cualquier diámetro)	$I = \frac{2}{5}MR^2$
Cilindro hueco (eje pasa por el centro y longitudinal)	$I = MR^2$
Cilindro macizo (eje pasa por el centro y longitudinal)	$I = \frac{1}{2}MR^2$

Momento Angular I, $\vec{L}$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}} \qquad \Longrightarrow \qquad [L] = kg \cdot \frac{m^2}{s}$$

1. Dirección $\perp$ al plano que forman $\vec{r}$ y $\vec{v}$.
2. Sentido. Regla de la mano derecha
3. Módulo.

$$|L| = mrv \sin \alpha$$



Relación entre momento angular y momento de inercia

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = mr^2\vec{\omega} \Rightarrow \boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

Momento Angular II.

MOMENTO, [M]

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \cancel{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA ROTACIÓN

$$\boxed{\sum \vec{M} = Fr \sin\theta = mar = mr^2\alpha = I\vec{\alpha}}$$

PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

$$\sum \vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte \Rightarrow \boxed{L_{inicial} = L_{final}}$$

1. Partícula libre
2. La fuerza neta es paralela al vector de posición del punto donde se aplica, fuerza central.