FÍSICA

2º Bachillerato

Física Relativista

Prof. Jorge Rojo Carrascosa

Índice general

Capítulo 1

FÍSICA RELATIVISTA

A finales del siglo XIX se suponía que el espacio vacío de materia estaba ocupado por un fluido impalpable, imponderable y perfectamente elástico llamado *éter*. En él, la vibración de sus partículas posibilitaban la propagación de la luz con velocidad de $3 \cdot 10^8$ m/s recientemente descubierta por Maxwell.

El *éter* se consideraba un sistema de referencia absoluto, privilegiado e inmutable a partir del cual, el resto de los sistemas de referencia tenían un movimiento. Sin embargo, un estudio sobre la velocidad de la luz en el supuesto éter y la comprobación de la propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío, contradecian la existencia de dicho *éter* e incluso, las leyes clásicas de la física.

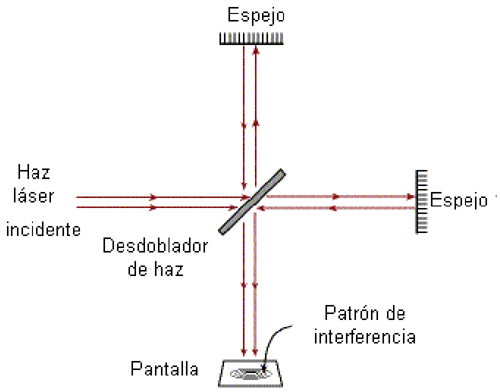
Así pués, fue necesario una reordenación de las leyes de la física para poder comprender ciertos fenómenos que se relacionaban con la velocidad de propagación de la luz.

1.1. EL EXPERIMENTO DE MICHELSON-MORLEY

Si la tierra se mueve respecto al *éter*, la velocidad de la luz respecto a la tierra dependería de la dirección de propagación de la luz. Según las transformaciones galileanas para la luz propagandose en el mismo sentido que la tierra, la velocidad de la luz respecto de la tierra debería ser $c - v$ y en sentido contrario $c + v$, siendo c la velocidad de la luz y v la velocidad de la tierra respecto al *éter*.

En 1881, Michelson y Morley iniciaron una serie de experimentos encaminados a detectar estas diferencias en la velocidad de la luz segun fuese la dirección de propagación respecto a la dirección del movimiento de la tierra.

Para ello utilizaron un interferómetro, el cual consiste en una lámina semiplateada que divide un rayo de luz en dos rayos coherentes que recorren caminos perpendiculares ambos de longitud 2D, uno en la supuesta dirección del éter y otro en dirección perpendicular a él. En caso de la existencia del éter, éste sería uno de los responsables de la diferencia de tiempos empleados por la luz en recorrer los caminos y por tanto, un patrón de interferencia.



En 1887, en fragante contradicción con las ecuaciones de transformación de Galileo, se comprobó que la velocidad de la luz era la misma en todas las direcciones, esto significaba que o bien el *éter* estaba en reposo relativo respecto a la tierra o que la velocidad de la luz era isótropa en cualquier sistema de referencia.

Este mismo hecho también pudo constatarse con objetos móviles con velocidades comparables a la luz, tales como electrones o partículas provenientes de los rayos cósmicos.

Finalmente, puesto que el *éter* no tenía propiedades físicas medibles, su existencia era innecesaria. A partir de ahora, dos observadores en movimiento relativo no podían utilizar el mismo conjunto de relaciones para transformar las leyes de la mecánica y del electromagnetismo de un referencial a otro y por tanto, no existía un sistema de referencia absoluto.

Desde sistemas de referencia distintos se describe de distinta forma un mismo movimiento y es imposible definir un sistema de referencia absoluto que este en reposo respecto al espacio vacío, ya que el espacio vacío no contiene elementos que puedan tomarse como referencia.

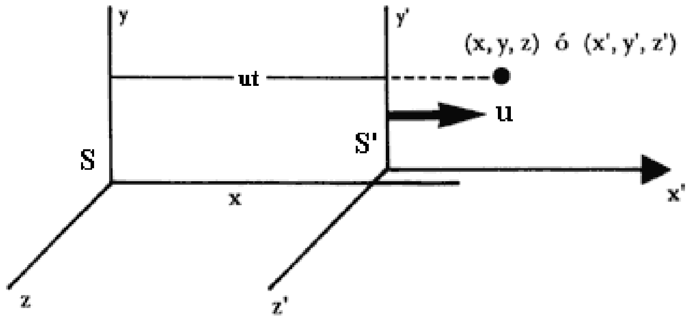
1.2. PRINCIPIO DE RELATIVIDAD CLÁSICO

Galileo estableció, que todas las leyes de la mecánica deben ser las mismas para todos los sistemas de referencia que se muevan con velocidad constante unos respecto a los otros. Siendo conocidos estos sistemas de referencia como **sistemas de referencia inerciales, SRI**.

1.2.1. TRANSFORMACIONES DE GALILEO

Si tenemos dos SRI, $OXYZ$ y $O'X'Y'Z'$, tales que el segundo se mueve con velocidad constante u respecto al primero a lo largo del eje OX y en $t = 0$, O y O' coinciden, al cabo de un cierto tiempo t, el desplazamiento relativo de los orígenes de ambos sistemas será $OO' = ut$, siendo $u = (u, 0, 0)$.

Puesto que la posición de un móvil P respecto al sistema O viene dado por $\vec{r}$ y respecto a O' por $\vec{r'}$,



$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{u}t \;\Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Suponiendo que t es independiente del estado de movimiento, podemos añadir la ecuación $t = t'$.

Estas cuatro ecuaciones constituyen las **transformaciones galileanas** de las coordenadas y del tiempo. Así, para la velocidad y la aceleración queda,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \;\Rightarrow\; v' = v - u \;\Rightarrow\; \begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \;\Rightarrow\; a' = a \;\Rightarrow\; \begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases}$$

Como podemos observar, en ambos sistemas de referencia inerciales se mide la misma aceleración, es decir, **la aceleración es invariante para todos los sistemas inerciales bajo una transformación galileana**. Sin embargo, la posición y la velocidad son magnitudes relativas, es decir, no son invariantes.

1.3. PRINCIPIO DE RELATIVIDAD ESPECIAL

Una vez descartada la idea del *éter*, **Albert Einstein** aventuró que la velocidad de la luz no sólo debía ser isótropa, sino la misma en todos los sistemas de referencia e independiente de su estado de movimiento relativo. Así, en 1905, estableció el *principio de relatividad especial o restringido*, estando fundamentado en dos postulados:

- PRIMER POSTULADO: Las Leyes de la naturaleza son invariantes para todos los Sistemas de Referencia Inerciales. Es decir, las Leyes de la física pueden expresarse mediante ecuaciones que poseen la misma forma en todos los Sistemas de Referencia que se mueven a velocidad constante unos de otros. Equivale a considerar que **no existen sistemas de referencia absolutos**.
- SEGUNDO POSTULADO: La velocidad de la luz es invariante para todos los Sistemas de Referencia. En el vacío, la velocidad de la luz es $c = 3 \cdot 10^8$ m/s y no depende del observador que lo mide ni del movimiento de la fuente luminosa. Por tanto, esta velocidad es absoluta.

Bajo este prisma, la transformación galileana no es correcta puesto que si la velocidad viene dada por, $v = \frac{s}{t}$, habría que ajustar el tiempo y la distancia para que el cociente fuera el mismo y la velocidad de la luz que analizarán dos observadores en movimiento relativo fuera igual a c.

Por tanto, el intervalo de tiempo o el espacio ente dos eventos no tiene que ser necesariamente el mismo para observadores en movimiento relativo y debe reemplazarse la transformación de Galileo por otra de modo que c sea invariante.

1.3.1. TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

Supongamos dos observadores en S.R.I. $OXYZ$ y $O'X'Y'Z'$ en movimiento relativo de velocidad constante u a lo largo del eje OX común. En el instante en que $O = O'$ se emite un rayo de luz que se desplaza a velocidad c respecto a ambos S.R.. Al cabo de un tiempo t medido en el sistema $OXYZ$ y de un tiempo t' medido en $O'X'Y'Z'$ la señal luminosa llega a un punto P. Los vectores de posición, que dependen de las tres direcciones espaciales, para cada sistema de referencia vendrán dados por:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Dado que la velocidad de la luz en ambos sistemas de referencia es c y el vector de posición, de forma general, viene dado por el producto de $\vec{r} = \vec{c}t$,

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{c}^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \mathrm{c}^2 t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \end{array} \right.$$

Por simetria, $y = y'$; $z = z'$. Puesto que c es constante, induce a pensar que las ecuaciones de transformación que relacionan x' con x y t' con t seran lineales, de manera que:

$$x' = \gamma(x - ut) \qquad t' = a(t - bx)$$

Siendo γ, a, b constantes a determinar. Así pues, sustituyendo en (*):

$$c^2a^2(t^2 + b^2x^2 - 2tbx) = \gamma^2(x^2 + u^2t^2 - 2xut) + y^2 + z^2$$

Agrupando términos:

$$c^2t^2(a^2 - \frac{\gamma^2 u^2}{c^2}) = (\gamma^2 - b^2a^2c^2)x^2 - 2(\gamma^2 u - ba^2c^2)xt + y^2 + z^2$$

No queda más remedio que para que se cumpla (*) se tienen que dar como soluciones,

$$a^2 - \frac{k^2u^2}{c^2} = 1 \qquad ; \qquad \gamma^2 - b^2a^2c^2 = 1 \qquad ; \qquad \gamma^2 u - ba^2c^2 = 0$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones,

$$\gamma = a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad b = \frac{u}{c^2}$$

Siendo γ conocido como el **factor de Lorentz** y cuyo valor siempre va a ser mayor que la unidad.

Por tanto, la nueva transformación compatible con la invarianza de c es,

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{x' = \gamma(x - ut) = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}} \quad ; \quad \boxed{y' = y} \quad ; \quad \boxed{z' = z} \\ \boxed{t' = a(t - bx) = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}} \end{array} \right.$$

Este conjunto de ecuaciones es denominado **transformaciones de Lorentz**, ya que fue obtenido por él al estudiar el campo electromagnético creado por una carga puntual en movimiento.

Analizando estas ecuaciones, si $u <<< c$ entonces, $\gamma \approx 1$ y $b \approx 0$ y las ecuaciones de transformación clásicas de Galileo están completamente justificadas y tienen toda precisión en los cálculos.

La transformación inversa de Lorentz nos proporciona los valores en el sistema $OXYZ$ a partir de los del sistema $O'X'Y'Z'$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = \gamma(x' + ut') = \dfrac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}} \quad ; \quad \boxed{y = y'} \quad ; \quad \boxed{z = z'} \\ \boxed{t = a(t' + bx') = \dfrac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}} \end{array} \right.$$

1.3.2. SUMA RELATIVISTA DE VELOCIDADES

Supongamos que viajamos en una nave espacial a una velocidad $0,5c$ y lanzamos un objeto en la misma dirección y sentido a una velocidad $0,6c$ respecto a la nave, según la transformación de Galileo, el objeto alcanzaría una velocidad de $1,1c$ y superaría el valor de c. Esta paradoja queda invalidada al utilizar la transformación de Lorentz.

Si un rayo de luz va desde O a un punto P en el mismo tiempo que el sistema $O'X'Y'Z'$ va desde O a O', teniendo en cuenta la definición de velocidad:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \; ; \; v_y = \frac{dy}{dt} \; ; \; v_z = \frac{dz}{dt} \; ; \; v'_x = \frac{dx'}{dt'} \; ; \; v'_y = \frac{dy'}{dt'} \; ; \; v'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

Diferenciando las expresiones,

$$dx' = \gamma(dx - udt) = \gamma(v_x - u)dt \quad ; \quad dy' = dy \quad ; \quad dz' = dz$$

$$dt' = \gamma(dt - u\frac{dx}{c^2}) = \gamma(1 - \frac{uv_x}{c^2})dt$$

y sustituyendo en las expresiones de la velocidad,

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \quad ; \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{uv_x}{c^2})} \quad ; \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{uv_x}{c^2})}$$

De nuevo, si $u <<< c$ estas expresiones se reducen a las transformaciones de Galileo.

Gracias a estas ecuaciones podemos comprobar la validez del segundo postulado de la teoria de la relatividad especial, es decir, la invariaza de la velocidad de la luz.

Imaginemos un haz de partículas moviendose en la dirección X a una velocidad c. Entonces, tendríamos que $v_x = v = c$, $v_y = v_z = 0$ y $v'_x = v'$. Aplicando la ecuación de la velocidad en el sistema $O'X'Y'Z'$:

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}} = \frac{c - u}{1 - \frac{uc}{c^2}} = \frac{c - u}{\frac{c-u}{c}} = c$$

tanto para $OXYZ$ como para $O'X'Y'Z'$ la velocidad de la luz es c.

Además, no puede ocurrir que $u > c$ puesto que $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$ sería imaginario y sin significado físico. Por tanto, c es no sólo invariante, sino también inaccesible a cualquier sistema natural.

La **transformación inversa de la velocidad** es:

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} \quad ; \quad v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1 + \frac{uv'_x}{c^2})} \quad ; \quad v_z = \frac{v'_z}{\gamma(1 + \frac{uv'_x}{c^2})}$$

1.3.3. LA CONTRACCIÓN DE LA LONGITUD

En un proceso no relativista, en donde podemos utilizar las transformaciones de galileo, la longitud de un varilla situada en el eje OX en un sistema $OXYZ$ vendrá dada por la diferencia en las posiciones de sus extremos,

$$L = x_2 - x_1$$

En el sistema $O'X'Y'Z'$ utilizando las transformaciones de galileo, la longitud de la varilla vendrá dada por:

$$L = x_2 - x_1 = (x'_2 + ut) - (x'_1 + ut) = x'_2 - x'_1 = L'$$

Es decir, la longitud de la varilla y en general, **la distancia**, no son relativos desde el punto de vista clásico. Sin embargo, desde el punto de vista relativista hay que aplicar las transformaciones de Lorentz,

$$L = x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 + ut) - \gamma(x'_1 + ut) = \gamma(x'_2 - x'_1) = \gamma L'$$

$$\boxed{L' = L\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Donde L es la **longitud propia** de la varilla (longitud en el sistema de referencia en reposo con la varilla), L' es la longitud de varilla en el sistema en movimento relativo y γ es el factor de Lorentz. Como $u < c$, la raiz cuadrada es menor que la unidad y por tanto, la longitud de la varilla medida en el sistema con movimiento relativo, $O'X'Y'Z'$, es menor que en el sistema en reposo, $OXYZ$.

Este fenómeno se conoce con el nombre de **contracción de Lorentz** y puesto que la velocidad relativa entre ambos sistema, u, se encuentra al cuadrado, daría igual que la varilla se encontrará en el sistema de referencia $O'X'Y'Z'$ y fuera un observador en el sistema $OXYZ$ el que viera pasar al sistema relativista.

1.3.4. LA DILATACIÓN DEL TIEMPO

Algo parecido ocurre en los intervalos de tiempo. Así, un observador que mide un intervalo de tiempo entre dos sucesos que ocurren en el mismo lugar en el sistema $OXYZ$ obtendría una expresión:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Sin embargo, para un observador situado en un sistema $O'X'Y'Z'$ con velocidad u respecto al sistema $OXYZ$, el intervalo de tiempo medido sería distinto,

$$\boxed{\Delta t' = \gamma \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}}$$

Al ser γ mayor que uno, el intervalo de tiempo medido en cualquier otro sistema de referencia no solidario al que se encuentra el reloj, es siempre mayor que el tiempo propio, Δt.

La **dilatación del tiempo** da lugar a la conocida paradoja de los gemelos. En ésta, el gemelo que ha viajado a lo largo del universo a la velocidad de la luz al llegar a la tierra, encuentra que su hermano gemelo ha envejecido más que él.

1.3.5. SIMULTANEIDAD DE EVENTOS

La dilatación del tiempo tiene implícito otro factor, este elemento es la **simultaneidad de un proceso**. Para que dos sucesos sean simultáneos, el intervalo de tiempo que transcurre entre ellos debe ser cero, $\Delta t = 0$. Dicho de otro modo, dos sucesos en un sistema de referencia son simultáneos si las señales luminosas procedentes de los sucesos alcanzan en el mismo instante a un observador situado a mitad de camino entre ellos.

Imaginamos dos puntos cualquiera en el sistema $OXYZ$ que dan lugar a un suceso simultáneo. Según la transformación de Lorentz, estos eventos en el sistema $O'X'Y'Z'$ darán lugar a la siguiente situación:

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{u\Delta x}{c^2}) \xrightarrow{\Delta t=0} \Delta t' = -\gamma \frac{u\Delta x}{c^2}$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t) \xrightarrow{\Delta t=0} \Delta x' = \gamma \Delta x$$

Al ocurrir los eventos en dos puntos distintos del sistem $OXYZ$, se corrobora que en el sistema $O'X'Y'Z'$ no han ocurrido en el mismo tiempo. El **principio de simultaneidad es relativo**.

1.4. DINÁMICA RELATIVISTA

La mecánica clásica no impone ninguna restricción a la velocidad que puede adquirir cualquier objeto. Sin embargo, como hemos visto, la mecánica relativista impide que cualquier objeto supere la velocidad de la luz. Por tanto, la conversión de las definiciones de las magnitudes dinámicas y sus relaciones desde la formulación newtoniana a la formulación relativista debe ajustarse a dos axiomas:

- Las Leyes han de resultar invariantes para las transformaciones de Lorentz.
- Las expresiones relativistas deben reducirse a las Newtonianas cuando $u <<< c$, ya que, en esas condiciones los resultados concuerdan con la experiencia.

Así pues, si llamamos m_0 a la masa inercial de una partícula en sentido clásico, su cantidad de movimiento vendría dada por $p = m_0 u$. Desde el punto de vista relativista esta expresión no es invariante bajo las transformaciones de Lorentz y en consecuencia, para que cumpla con los dos axiomas, la cantidad de movimiento debe ser redefinida por:

$$\boxed{p = mu = m_0 \gamma u}$$

Siendo la **masa inercial**, m, función de la masa en reposo m_0 y de la velocidad de la partícula, u:

$$\boxed{m = m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}}$$

En mecánica relativista la masa inercial no es una característica inmutable de la partícula e independiente de su estado de movimiento. *Cuanto mayor es la velocidad mayor es la masa de la partícula* y cuando la velocidad se acerca a c,la masa tiende a infinito.

Para encontrar una expresión de la Energía total de la partícula móvil que sea invariante ante las transformaciones de Lorentz se puede partir de la definición de masa relativista. Realizando un desarrollo en serie de γ se llega a la expresión:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \dots$$

$$m = m_0 + \frac{1}{2}\frac{m_0 u^2}{c^2}$$

$$\boxed{m_0 \gamma c^2 = m_0 c^2 + E_c}$$

En los límites no relativistas, el miembro de la izquierda coincide con la energía cinética de la partícula salvo por el término m_0c^2. Por ello, se define como la **Energía total relativista** de la partícula a:

$$\boxed{E = m_0\gamma c^2 = mc^2}$$

Cuando la partícula esta en reposo ($E_c = 0$), esta Energía total se reduce a:

$$\boxed{E = m_0c^2} = E_0$$

expresión que recibe el nombre de **Energía en reposo** de la partícula, E_0, que no tiene equivalente en la dinámica Newtoniana y que expresa la inercia de la Energía.

En un sistema aislado,la energía total se conserva. Si no está aislado, la variación de energía equivale a una variación de la masa inercial del mismo, siendo este resultado conocido como el *principio de equivalencia entre la masa y energía.*

$$\boxed{\Delta E = \Delta mc^2}$$

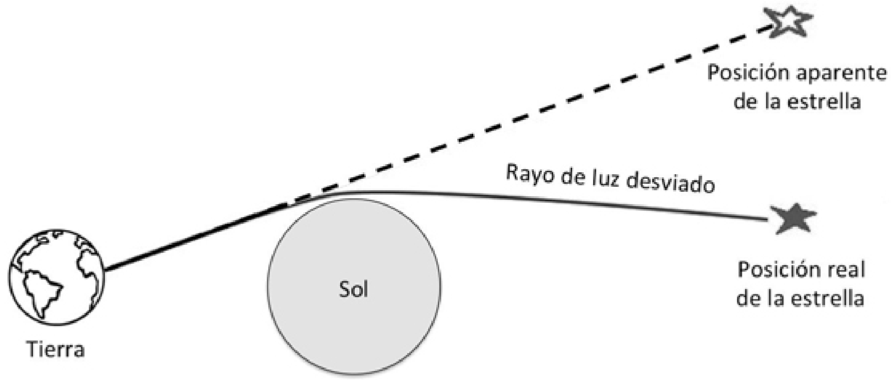
1.5. TEORÍA DE RELATIVIDAD GENERAL

En 1914, *Albert Einstein* amplió la teoría especial de la relatividad a sistemas de referencia no inerciales, es decir, a sistemas que tenían aceleración. Esta generalización se conoce con el nombre de **Teoría general de la relatividad**.

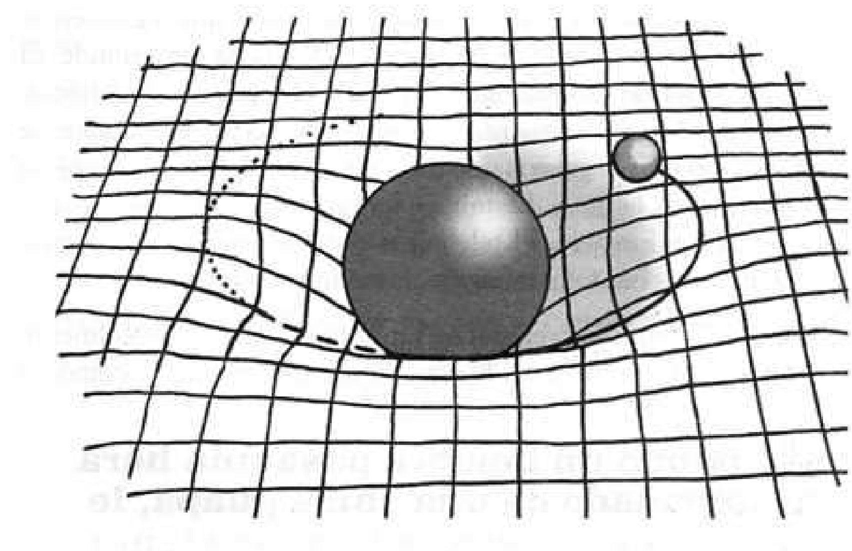
El punto de partida de la teoría es el **principio de equivalencia**, donde la masa inercial, debido a una fuerza, y la masa gravitatoria, debido a la presencia de un campo gravitorio, son identicas. Es decir, los campos gravitatorios y los sistemas acelerados son completamente equivalentes.

La primera consecuencia que se deriva de este principio es que la energía, por el principio de equivalencia entre la masa y la energía, también tendrá una masa gravitatoria y se sentirá atraida por los campos gravitatorios. Por tanto, la luz sufrirá cambios en la dirección de su propagación dentro de los campos gravitatorios de igual manera que lo hace cualquier masa inercial.

Este fenómeno es más acusado cuanto mayor es la masa de los cuerpos y se produce por la curvatura en el espacio que generan los cuerpos con masa. De esta manera, las trayectorias de los rayos de luz al pasar cerca de un campo gravitatorio son las conocidas, *líneas geodésicas.*



En 1905, *Minkowski* propuso considerar al tiempo como una cuarta dimensión y *Einstein* lo implementó en su teoría general de tal forma, que los efectos gravitatorios son consecuencia de la curvatura del continuo espacio-tiempo. El desarrollo matemático de la teoría de Einstein está basado en la *geometría Riemann*, que es una geometría no euclidiana y en la que el espacio tridimensional se curva en otra cuarta dimensión que es el tiempo.



1.6. PROBLEMAS RESUELTOS

1. En el instante $t = 10^{-7}$ segundos, un objeto está situado en la posición (5,2,4) metros para un observador situado en el sistema de referencia S. Determina sus coordenadas espaciales y temporal para un observador situado en S'que se mueve a una velocidad de $3,00 \cdot 10^7\ ms^{-1}$ respecto a S:

   a) Utilizando la transformación de Galileo.

   b) Utilizando la transformación de Lorentz.

   a) Aplicando las transformaciones de Galileo y teniendo en cuenta que el sistema S'se mueve respecto al eje 0X, nos queda

   $$x' = x - ut = 5 - 3,00 \cdot 10^7 \cdot 10^{-7} = 2,00\ m \qquad y' = 2\ m \qquad z' = 4\ m$$

   La coordenada temporal es invariante, por tanto $t' = t = 10^{-7}$ segundos

   b) Utilizando las transformaciones de Lorentz para el eje x y el tiempo,

   $$x' = \gamma(x - ut) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}(x - ut) = 2,01\ m \qquad y' = 2\ m \qquad z' = 4\ m$$

   $$t' = \gamma(t - \frac{ux}{c^2}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}(t - \frac{ux}{c^2}) = 1,005 \cdot 10^{-7}\ s$$

2. Calcula qué hora marcaría un reloj en la tierra al regresar una nave espacial si esta sale de la tierra con una velocidad de 0,9c y vuelve a la tierra cuando el reloj de la nave marca una hora más que la de salida.

   Es un caso de dilatación temporal en el que el intervalo de tiempo entre dos sucesos simultáneos es mayor en el sistema en reposo.

   $$\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 2,294\ h = 2\ h\ 18\ min$$

3. Cuando una nave espacial está en reposo mide 50 metros. ¿Qué longitud medirá el mismo observador cuando la nave se mueva con una velocidad de $2,4 \cdot 10^8\ ms^{-1}$?

   Para el observador en reposo con respecto a la nave, la longitud que observará de ésta será de 50 metros. Sin embargo, cuando la nave su mueve con velocidades cercanas a la velocidad de la luz, el observador en el sistema S, observará una contracción en la nave al moverse en unsistema relativista S'.

$$L = \frac{1}{\gamma} L_0 = L_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 30 \; metros$$

4. La masa en reposo de una bola de billar es de 400 g. Si la aceleramos hasta $0,6c$, calcula su masa aparente a esa velocidad, el porcentaje de aumento de masa y la energía que se le ha suministrado.

   La masa propia de la bola de billar es la masa en reposo, por tanto, $m_0 = 400 \; g$. Ahora bien, para calcular la masa aparente o relativa tenemos que utilizar transformaciones invariantes. Es decir,

$$m = \gamma m_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} m_0 = 500 \; g$$

   El porcentaje de aumento queda,

$$\% = \frac{500 - 400}{400} 100 = 25 \,\%$$

   La energía suministrada en el proceso de aceleración vendrá dada por,

$$E = \Delta m c^2 = (500 - 400) 3 \cdot 10^8 = 3 \cdot 10^{10} \; J$$

5. Dos partículas iguales, cuya masa en reposo es de 1 g, chocan a una velocidad de 0,6c y quedan reducidas a una única masa M_0 en reposo. Calcula:

   a) Su masa relativista antes del choque
   b) La energía relativista total de las dos partículas antes del choque
   c) La masa final

   a) La masa relativista, teniendo en cuenta que las dos partículas tienen la misma masa propia y se aceleran hasta la misma velocidad será

$$m_1 = m_2 = \gamma m_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} m_0 = 1,25 \; g$$

   b) Primero calculamos la energía relativista de cada partícula y después sumamos ambas,

$$E_1 = E_2 = mc^2 = 1,2510^{-3} \cdot 3 \cdot 10^8 = 1,125 \cdot 10^{14} \; J$$

$$E = E_1 + E_2 = 2,25 \cdot 10^{14} \; J$$

c) Como la energía relativista se conserva en el choque,

$$E = E_1 + E_2 = m_0 c^2 \Rightarrow m_0 = \frac{E}{c^2} = 2,5 \cdot 10^{-3}\ kg$$