FÍSICA

2º Bachillerato

Mecánica Clásica

Prof. Jorge Rojo Carrascosa

Índice general

Capítulo 1

CINEMÁTICA

La cinemática estudia el movimiento de los cuerpos sin tener en cuenta las causas que los producen. Por tanto, tan sólo se ocupa de los aspectos externos como son el desplazamiento, el espacio recoorido, la velocidad o la aceleración.

Un cuerpo se mueve cuando cambia de posición con relación a otro que se toma como referencia. Por tanto, para describir el movimiento de cualquier cuerpo hay referirlo a un **sistema de referencia**. Los sistemas de referencia suelen ser los ejes cartesianos. A la hora de elegir un sistema de referencia podemos hacerlos de varios modos, por ejemplo para describir el movimiento de una moto podemos elegir un sistema de referencia con el origen desde donde comenzó el movimiento o un sistema de referencia solidario con la moto, esto es, que viaja con la moto. Por tanto, un mismo movimiento es distinto desde sistemas de referencias distintos, de ahí que todos los movimientos son relativos ya que dependen del observador (del sistema de referencia).

Cuando dos sistemas de referencia se mueven con velocidad constante o nula se dice que son sistemas de referencia inerciales; si la velocidad entre ellos no es constante, por que existan movimientos de traslación no uniforme o con movimiento de rotación, tenemos los llamados sistemas de referencia inerciales (masas de aire, satélites artificiales, olas marinas,...)

1.1. ELEMENTOS PARA LA DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO

En el estudio del movimiento hay que conocer que significan y como se aplican las distintas magnitudes físicas del movimiento:

1.1.1. VECTOR DE POSICIÓN ($\vec{r}$)

Es el vector que tiene su origen en el origen del sistema de referencia y el extremo en la posición del móvil. Un cuerpo se mueve cuando cambia su vector de posición con el tiempo. Por tanto el vector de posición depende del tiempo,

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \rightarrow \vec{r}(t) = (x(t)\vec{u}_x, y(t)\vec{u}_y, z(t)\vec{u}_z)$$

$\vec{u}_x, \vec{u}_y$ *e* $\vec{u}_z$ son los vectores unitarios a lo largo de los ejes cartesianos x, y, z respectivamente. Estos vectores, como ya sabemos, toman los valores $\vec{i}, \vec{j}$ *y* $\vec{k}$, por tanto, $\vec{r}$ nos queda:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \rightarrow \vec{r}(t) = (x(t)\vec{i}, y(t)\vec{j}, z(t)\vec{k})$$

1.1.2. VECTOR DESPLAZAMIENTO ($\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$)

Es el vector que une dos vectores de posición. No es lo mismo que el espacio o la distancia recorrida por el móvil.

1.1.3. TRAYECTORIA

Es la línea que une las distintas posiciones que describe un cuerpo cuando se mueve, $\sum_i \vec{r}_i$.

1.1.4. DISTANCIA O ESPACIO RECORRIDO, s

Es un escalar que mide la longitud de la trayectoria recorrida por el móvil. Si la trayectoria es una recta, el espacio coincide con el módulo del desplazamiento siempre y cuando no haya habido cambios de sentido.

1.1.5. VELOCIDAD, $\vec{v}$

Es la magnitud que mide la rapidez con la que se hace el movimiento y tiene la misma dirección y sentido que el desplazamiento. La velocidad media viene definida por,

$$\vec{v}_m = \frac{desplazamiento}{intervalo\ tiempo} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

al depender del vector desplazamiento, la velocidad media también es un vetor. Si tomamos el límite funcional en el que el intervalo de tiempo tiende a cero (la derivada), se obtiene la velocidad instantánea,

$$\vec{v}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r(\vec{t})}{dt} = \frac{dr(\vec{t})}{dt} \to \vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) \to |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

La velocidad instantánea mide la rapidez con la que se produce el movimiento en un instante dado. La velocidad se mide en $[v] = \frac{L}{T} = \frac{m}{s}$. Cualquiera que sea el movimiento la velocidad se puede expresar en función del vector unitario tangencial al movimiento, esto es consecuencia del límite funcional del desplazamiento, provocando que la velocidad tenga de dirección la tangente a la curva en cualquier punto y sentido el del movimiento.

$$\vec{v} = v\vec{u}_T$$

1.1.6. ACELERACIÓN, $\vec{a}$

Es la magnitud que mide la rapidez con la que cambia de velocidad un móvil (tanto en valor como en dirección) y la dirección en la que se produce ese cambio. El vector aceleración media viene definida por,

$$\vec{a}_m = \frac{intervalo\ velocidad}{intervalo\ tiempo} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Si tomamos el límite funcional en el que el intervalo de tiempo tiende a cero, tenemos el vector aceleración instantánea,

$$\vec{a}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(\vec{t})}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2 r(t)}{dt^2} \to \vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t)) \to |a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

La aceleración se mide en $[a] = \frac{L}{T^2} = \frac{m}{s^2}$

Haciendo uso de la definición de la velocidad en la dirección del vector tangencial, $\vec{v} = v\vec{u}_T$, la aceleración nos queda,

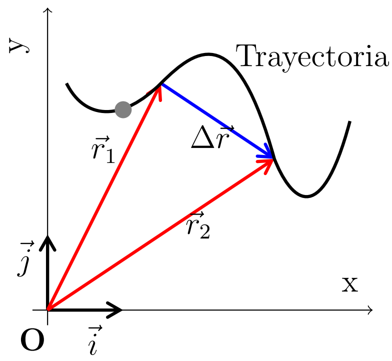
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv\vec{u}_T}{dt} = v\frac{d\vec{u}_T}{dt} + \frac{dv}{dt}\vec{u}_T$$

En el caso de un movimiento rectilineo $\frac{d\vec{u}_T}{dt} = 0$ y la trayectoria es una recta, la aceleración se llama **aceleración tangencial** y es un vector de módulo $\frac{dv}{dt}$, y dirección y sentido los de $\vec{u}_T$.

Sin embargo, si el movimiento es curvilineo y el módulo de la velocidad permanece constante, tenemos que la aceleración tiene dos componentes, denominadas intrínsecas, cada una paralela a un vector unitario distinto. Quedando:

$$\vec{a} = \vec{u}_T\frac{dv}{dt} + \vec{u}_N\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}}$$

El primer término es la **aceleración tangencial**, cuyo vector es tangente a la curva y es proporcional al cambio con respecto al tiempo de la magnitud velocidad. El segundo término es la **aceleración normal**, es un vector normal a la curva y por tanto, asociado al cambio en la dirección, ya que se corresponde con $\frac{d\vec{u}_T}{dt}$.



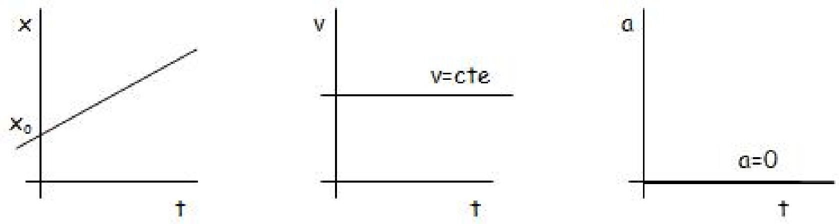
1.2. MOVIMIENTOS DE INTERES

1.2.1. MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORME (MRU)

Se produce cuando no existe aceleración y la velocidad es contante en módulo y dirección. La trayectoria es una recta, si no existen cambios de sentido coinciden el desplazamiento y el espacio recorrido. La posición del móvil vine dada por la distancia al origen del sistema de referencia.

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow \boxed{s = s_0 + v(t - t_0)}$$

s_0 es la distancia inicial a la que se encuentra el móvil y t_0 el tiempo a partir del cual el móvil ha iniciado su movimiento.



1.2.2. MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (MRUA)

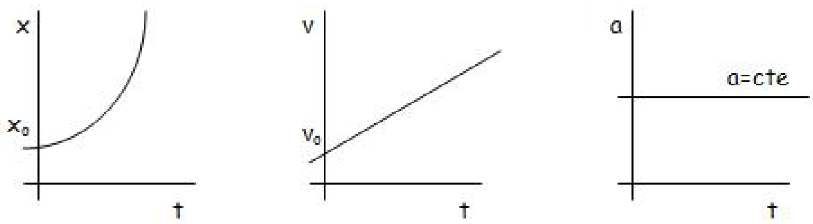
En este caso tenemos al móvil sometido a una fuerza constante cuya aceleración es constante, la velocidad cambia en módulo:

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow \boxed{v = v_0 + a(t - t_0)}$$

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow \boxed{s = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2}$$

Despejando el tiempo en una de las ecuaciones y sustituyendo, tenemos:

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)}$$



1.2.3. CAIDA LIBRE

En este caso el cuerpo esta sometido a la acción de la gravedad, g, la trayectoria es una línea recta. La resistencia del aire se desprecia. La aceleración de la gravedad se toma siempre negativa puesto que tiene sentido negativo al eje y. Las ecuaciones del movimiento quedan dadas por:

$$\boxed{v = v_0 + gt}$$

$$\boxed{h = h_0 + \frac{1}{2}gt^2}$$

Tomando $v_0 = 0$ y con el origen de tiempos coincidente con el origen de espacios. Eliminando entre ambas el tiempo,

$$\boxed{v = \sqrt{2g(h - h_0)}}$$

1.2.4. TIRO VERTICAL

Se llama así al movimiento de un cuerpo que se lanza verticalmente hacía arriba con una velocidad v_0. Al igual que en la caida libre la aceleración se toma negativa, es decir $g = -9,8\ \frac{m}{s^2}$, y la resistencia del aire sigue siendo nula. Quedando:

$$\boxed{v = v_0 + gt}$$

$$\boxed{h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2}$$

Siendo v_0 la velocidad del lanzamiento.

1.2.5. MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (MCU)

Se produce cuando un móvil describe una trayectoria circular con velocidad angular constante, $\omega = cte$. Esto se consigue aplicando una fuerza constante y constantemente perpendicular a la velocidad, sólo existe aceleración normal, $a_n = \frac{v^2}{R}$
Al ser un movimiento circular, el espacio lineal carece de sentido y se utiliza el ángulo θ o φ para describir su posición. El ángulo se mide en radianes, de ahí que la relación entre la magnitud espacial lineal y la angular sea,

$$s = \theta R$$

siendo R, el radio de la circunferencia que describe. La velocidad angular se define como el ángulo recorrido en la unidad de tiempo,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

La velocidad angular, ω, se mide en el sistema internacional de unidades en $\frac{rad}{s}$, aunque muchas veces se da en rpm. La relación entre la velocidad lineal y la velocidad angular viene dada por $v = \omega R$. La ecuación del movimiento circular uniforme queda,

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega \rightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \boxed{\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)}$$

El periodo, tiempo que tarda el móvil en dar una vuelta, se relaciona con ω mediante $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$, donde ν es la frecuencia angular, número de vueltas que da un móvil en la unidad de tiempo, se mide en s^{-1}.

1.2.6. MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO (MCUA)

En este caso la $\omega \neq constante$ y se define la acelaración angular como, $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$, de unidades $[\alpha] = \frac{rad}{s^2}$.

El movimiento circular es un plano, la dirección de la velocidad angular permanece invariable. Quedandonos

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \to \boxed{\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \to \boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2}$$

Las relaciones entre las aceleraciones lineales y angulares quedarán,

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha} \qquad \boxed{a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R}$$

1.2.7. TIRO OBLICUO ó PARABÓLICO

En la naturaleza, se dan con frecuencia muchos otros tipos de movimientos cuya trayectoria es una curva plana. El tiro parabólico es aquel donde el móvil es lanzado con una velocidad inicial formando un ángulo con la horizontal, teniendo en cuenta la descomposición de la velocidad en sus componentes rectangulares y la acción de la gravedad en dirección vertical, podemos considerar este movimiento compuesto por dos movimientos:

- Uno horizontal con velocidad uniforme $v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha$.
- Otro vertical uniformemente acelerado con velocidad inicial $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha$ y aceleración la gravedad $g = -9,8\ \frac{m}{s^2}$.

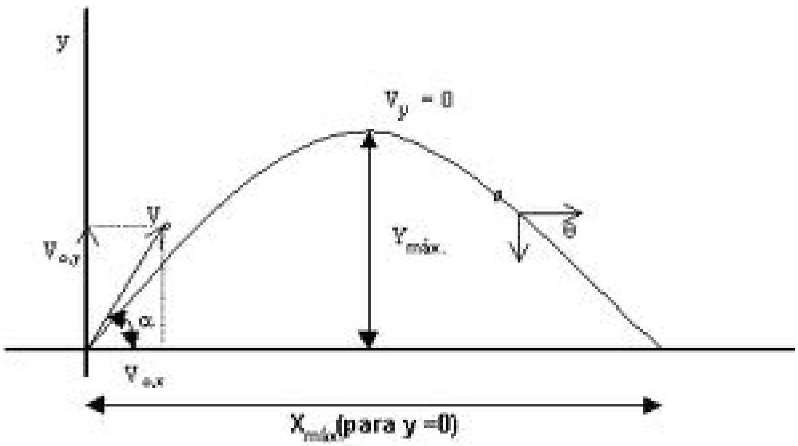
Por tanto, las ecuaciones del movimiento vendrán dadas por,

$$Aceleración \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases}$$

$$Velocidad \begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_y = v_{0y} + gt = v_0 \operatorname{sen}\alpha + gt \end{cases}$$

$$Posición \begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha \\ y = y_0 + v_0 t \operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Si se elimina el tiempo entre las ecuaciones de la posición se obtiene la ecuación de la trayectoria.



]

1.2.8. TIRO HORIZONTAL

El tiro oblicuo es una simplificación del tiro parabólico. En este caso, el lanzamiento desde una altura de forma paralela a la horizontal provoca las mismas ecuaciones que en las del tiro oblicuo pero de forma simplificada, ya que no existe ángulo de lanzamiento, $\alpha = 0^o$ y la $v_{0y} = 0$.

1.2.9. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Un movimiento armónico simple (**MAS**) es un movimiento vibratorio y por tanto, oscilatorio y periódico. Es oscilatorio por que periodicamente la distancia del móvil al centro de oscilación pasa por un valor máximo y otro mínimo. Y además es periódico, por que a intervalos de tiempo iguales, las variables cinemáticas toman el mismo valor. Movimientos armónicos simples son, por ejemplo, el giro de un satelite alrededor de un planeta, un pendulo,. . .

En un MAS el origen es el punto medio del desplazamiento y en cada vibración se pasa por él. Al no considerar atenuaciones del movimiento producidas por el medio , el movimiento armónico pasa a denominarse simple. Se conoce con el nombre de **amplitud**, **A**, a la distancia que existe desde el origen hasta el extremo el movimiento. El espacio que recorre el móvil entre dos pasos sucesivos por el mismo punto y en el mismo sentido se conoce como oscilación.

La ecuación del movimiento a lo largo del eje X podemos representarla mediante una función trigonométrica tal,

$$\boxed{x = A\sin(\omega t + \phi_0)}$$

Siendo x la *elongación*, A la *amplitud*, ω la *frecuencia angular*, ϕ_0 la fase inicial y t el tiempo. Al argumento del seno se denomina *fase*. Si la función trigonométrica alcanza el valor máximo o mínimo, 1 o -1, obtenemos las elongaciones máximas y mínimas del movimiento, A y $-A$.

En el MAS se utilizan mucho los términos de frecuencia y periódo.

Si derivamos esta expresión en función del tiempo nos encontramos la velocidad del movimiento armónico simple,

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi_0)}$$

Cuando $\cos(\omega t + \phi_0) = 1$ obtenemos la velocidad máxima del movimiento, $v_{max} = \pm A\omega$, que ocurre cuando el móvil pasa por el punto medio del movimiento. Utilizando la ecuación fundamental de la trigonometría podemos hallar la relación entre la velocidad y la elongación como,

$$\boxed{v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}}$$

Si ahora, derivamos la velocidad, obtenemos la aceleración,

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi_0)}$$

Siendo la aceleración máxima cuando $\sin(\omega t + \phi_0) = 1$, es decir, en los extremos, $a_{max} = \pm A\omega^2$. De igual manera que con la velocidad, podemos relacionar la aceleración con la elongación,

$$\boxed{a = -\omega^2 x}$$

1.3. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un coche viaja 50 m por detrás de un camión sin respetar la distancia de seguridad. Ambos se mueven a 120 km/h. De repente, el camión frena con una aceleración de 8 m/s^2. El conductor del coche tarda $0,35$ segundos en reaccionar, y su coche frena con una aceleración de 6 m/s^2.

    a) ¿Qué distancia separa ambos vehículos en el momento de empezar a frenar el coche, una vez transcurrido el tiempo de reacción?

    b) ¿Qué velocidad lleva el camión en ese momento?

    c) ¿Qué distancia necesitarían el camión y el coche para detenerse por completo, sin tener en cuenta el tiempo de reacción?

    d) ¿Cuántos segundos tarda el coche en chocar contra el camión, sin tener en cuenta el tiempo de reacción?

    e) ¿A qué velocidad viajan el coche y el camión en el momento de chocar, en km/h?

$v_{co} = 33,3 m/s; t = +0,35\ s$

$v_{ca} = 33,3 m/s$

$50\ m$

La situación es clara, un coche va detrás de un camión, el camión frena y desde que lo ve el conductor del coche hasta que reacciona y pisa el freno transcurren $0,35\ s$, durante ese tiempo el coche se mueve con un M.R.U. pero el camión realiza un M.R.U.A. ($a = -8\ m/s^2$), pasados esos $0,35\ s$ ambos realizan un M.R.U.A. (con aceleración negativa).

Como siempre, primero ecuación del movimiento de ambos móviles,

CAMIÓN

$$s_{ca} = s_{0ca} + v_{ca} \cdot t - \frac{1}{2}a_{ca} \cdot t^2 \Longrightarrow s_{ca} = 50 + 33,3t - 4t^2$$

Tomamos como origen de espacios y de tiempos la posición y el momento del coche cuando ve la luz de freno del camión, por tanto, el espacio inicial que tiene el camión es de 50 metros.

COCHE

Primeros 0,35 segundos

$$s_{co} = s_{0co} + v_{co} \cdot t \Longrightarrow s_{co} = 33,3t$$

Posterior a 0,35 segundos

$$s_{co} = s_{0co} + v_{co} \cdot t - \frac{1}{2} a_{co} \cdot t^2 \Longrightarrow s_{co} = 33,3t - 3t^2$$

a) En el momento de frenar el coche, han transcurrido $0,35$ segundos, este tiempo se introduce en las correspondientes ecuaciones del movimiento y veos cuál es el espacio que les separa,

$$s_{ca} = 50 + 33,3t - 4t^2 \stackrel{t=0,35\ s}{\Longrightarrow} s_{ca} = 61,16\ m$$
$$s_{co} = 33,3t \stackrel{t=0,35\ s}{\Longrightarrow} s_{co} = 11,65\ m$$

Exactamente les separan $d = 61,235 - 11,72 = 49,515\ m$

b) La velocidad del camión en ese momento es de,

$$v_{ca} = v_0 + at = 33,3 - 8t \stackrel{t=0,35\ s}{\Longrightarrow} v_{ca} = 30,5\ m/s$$

c) Fijaros que nos dice sin tener en cuenta el tiempo de reacción, entonces, en todo momento tenemos un M.R.U.A,

$$v_{ca}^2 = v_{0ca}^2 + 2as = 33,3^2 - 16s \stackrel{v_{ca}=0}{\Longrightarrow} s_{ca} = 69,3\ metros$$

Para este espacio que hemos hallado hay que sumarle los 50 metros que lleva de ventaja sobre el coche, por tanto, desde nuestro sistema de referencia, el camión se parará a los 119,3 metros

$$v_{co}^2 = v_{0co}^2 + 2as = 33,3^2 - 12s \stackrel{v_{co}=0}{\Longrightarrow} s_{co} = 92,4\ metros$$

Como vemos, podemos pensar que ambos vehículos no van a chocar puesto que la distancia que recorre en su frenada el coche es menor que la del camión, pero que choquen o no depende de la deceleración que tiene uno u otro, dicho de otra forma, la rapidez con que ambos móviles disminuyen su velocidad.

En este mismo apartado podemos hallar el tiempo que tarda cada móvil en pararse. Con la expresión $v = v_0 + at$ y poniendo cero en la velocidad final, nos encontramos que el tiempo que necesita cada móvil para pararse es de, $t_{ca} = 4,16$ segundos y $t_{co} = 5,55$ segundos.

d) Tomando las ecuaciones del movimiento para cada móvil, tenemos

$$s_{ca} = 50 + 33,3t - 4t^2$$
$$s_{co} = 33,3t - 3t^2$$

En el momento que choquen (es una persecución), ambos se encontraran en la misma posición, esto es, $s_{co} = s_{ca}$, entonces

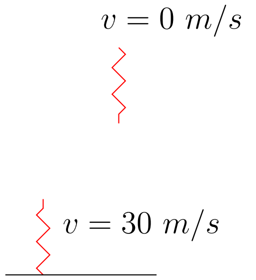
$$33,3t - 3t^2 = 50 + 33,3t - 4t^2 \Rightarrow t = 7,07 \ segundos$$

Como vemos el tiempo para encontrarse es mayor que el tiempo de frenada de cada mehículo, por tanto, el coche nunca chocará con el camión.

e) Los vehículos no colisionan.

2. Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 30 m/s. Halla:

   a) Posición que ocupa y velocidad al cabo de 1 segundo.
   b) La altura máxima que alcanza y el tiempo empleado.
   c) Velocidad cuando llega al suelo y tiempo total empleado.
   d) ¿Qué relación hay entre los tiempos calculados en los apartados b y c?.
   e) ¿Cómo son las velocidades de partida y de llegada?.



a) En esta ocasión tenemos un lanzamiento vertical, las ecuaciones del movimiento serán,

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow$$

$$t_{1s} \rightarrow h = 30 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 1^2 = 25,1 \ metros$$

y la velocidad al cabo de 1 segundo,

$$v_{1s}^2 = v_0^2 - 2gh_{1s} \rightarrow v_{1s} = 20,2 \ m/s$$

b) La altura máxima la alcanzará cuando $v = 0\ m/s$, por tanto,

$$v = v_0 - gt \rightarrow t = \frac{v_0}{g} = 3,06\ s$$

$$h_{max} = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow h_{max} = 30 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 3^2 = 45,9\ metros$$

c) Ahora nuestro problema se ha convertido en un problema típico de caida libre, por tanto para hallar la velocidad con la que llega al suelo primero tenemos que saber cuanto tiempo tarda en llegar al suelo,

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45}{9,8}} = 3,03\ segundos$$

$$v = v_0 + gt = 9,8 \cdot 3,03 = 29,8\ m/s$$

El tiempo total empleado será la suma entre el tiempo de subida y el tiempo de bajada, $t_{total} = 6,09$ segundos.

d) y e) Como podemos observar los tiempos de subida y bajada son practicamente iguales al igual que las velocidades. Esto es consecuencia de ser un problema simétrico y en el cuál sólo actuan campos conservativos.

3. Un avión de aprovisionamiento vuela horizontalmente sobre el océano a una altura de 5 km. Si su velocidad es de 360 kmh^{-1}, calcula:

   a) La distancia de la vertical de un islote a la que debe soltar un paquete de víveres para que caiga sobre el objetivo.

   b) La velocidad del paquete en el momento del impacto.

   a) Cuando el avión suelte el paquete, éste tendrá una velocidad horizontal, a lo largo del eje X, constante e igual a la velocidad del avión. En el eje Y no tiene velocidad inicial y su ecuación del movimiento es de caída libre. Planteamos ambas ecuaciones y calculamos el tiempo que tarda en caer el paquete. Este tiempo nos permite calcular el alcance del paquete y por tanto, a que distancia habrá que soltar el paquete para que caiga en la isla.

$$Eje\ X \Rightarrow x = 100t$$

$$Eje\ Y \Rightarrow y = 5000 - \frac{1}{2}10t^2 \xrightarrow{y=0} t = 31,9\ s$$

Siendo la distancia,

$$x = 100t \xrightarrow{t=31,9\ s} x = 3194\ m$$

b) Claculamos ambas velocidades, recordar que la velocidad en el eje X es constante, y hallamos su módulo.

$$v_x = 100\ m/s \qquad v_y = -gt = 312,6\ m/s$$

$$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 328,2\ m/s}$$

4. Un futbolista realiza un lanzamiento de balón con una velocidad inicial de 20 ms^{-1} que forma un ángulo de 40º con el suelo. Calcula la posición del balón y su velocidad al cabo de 2 s.

   Partiendo de las ecuaciones del movimiento y de la velocidad para cada eje, podemos hallar su posición y velocidad en el tiempo pedido,

$$x = v_0 \cos \alpha t \overset{t=2\ s}{\Longrightarrow} x = 30,6\ m$$

$$y = v_0 \,\mathrm{sen}\, \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \overset{t=2\ s}{\Longrightarrow} y = 6,1\ m$$

$$\boxed{\vec{r} = 30,6\ \vec{i} + 6,1\ \vec{j}\ m}$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha \overset{t=2\ s}{\Longrightarrow} v_x = 15,3\ ms^{-1}$$

$$v_y = v_0 \,\mathrm{sen}\, \alpha - gt \overset{t=2\ s}{\Longrightarrow} {}_y = -6,7\ ms^{-1}$$

$$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 16,7\ ms^{-1}}$$

5. Un satélite artificial gira alrededor de un planeta en órbita de radio 7000 km y tarda 1,5 h en dar una vuelta completa. Calcula:

   a) La velocidad del satélite.
   b) La aceleración.
   c) El ángulo girado en 50 minutos.

   a) Puesto que la velocidad del satelite es constante,

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi R}{t} = 8145\ ms^{-1}$$

b) Al no existir cambio en la velocidad del satelite, sólo hay aceleración normal, la aceleración tangencial es constante.

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 9,5\ ms^{-2}$$

c) Haciendo de la ecuación del movimiento para un movimiento circular y uniforme,

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t = 3,5\ rad = 200^{\circ}$$

Siendo $\varphi_0 = 0$ y $\omega = \frac{v}{R}$.

6. Una masa de 50 g unida a un resorte realiza, en el eje X, un movimiento armónico simple dado por la ecuación:

$$x = 0,050 \sin(2t - \frac{\pi}{3})$$

expresada en unidades del S.I. Calcula la posición y la velocidad inicial.

En el momento inicial, t=0, por tanto la posición será

$$x_0 = 0,050 \sin(-\frac{\pi}{3}) = 0,025\ m$$

para encontrar la velocidad en el instante inicial, primero derivamos respecto al tiempo la ecuación del movimiento y después, hallamos la velocidad para t=0 s.

$$v = 0,1 \cos(2t - \frac{\pi}{3}) \Rightarrow v_0 = 0,1 \cos(-\frac{\pi}{3}) = 0,087\ m/s$$

Capítulo 2

DINÁMICA

La Dinámica es una rama de la Física que estudia las acciones que se ejercen sobre los cuerpos y la manera en que estas acciones influyen sobre el movimiento de los mismos. Los cuerpos modifican su velocidad, esto es, sufren aceleraciones, como consecuencia de ejercerse sobre él una fuerza. Por tanto, si sobre un cuerpo se ejerce una fuerza éste modifica su velocidad aumentándola o disminuyéndola.

Recordemos que los sistemas de referencia inerciales son aquellos que se mueven con velocidad constante unos respecto a otros, de ahí que el *principio de inercia de Galileo* exprese que no es posible, de manera absoluta, distinguir entre reposo y movimiento rectilineo uniforme, ya que lo que para un sistema de referencia inercial esta en reposo, para otro sistema de referencia inercial esta en movimiento rectilineo uniforme. Expresado de otra manera, en ausencia de fuerzas, el movimiento de los cuerpos es rectilineo y uniforme.

A partir de las ideas de Galileo, **Newton** enunció los tres principios que llevan su nombre y que rigen el comportamiento dinámico de cualquier cuerpo. El concepto de **Fuerza** es consecuencia de la interacción entre distintos cuerpos y mide la intensidad de esta interacción. Las interacciones pueden producirse por contacto o a distancia, como ocurre con los imanes o con la interacción gravitacional.

2.1. LEYES DE NEWTON

Isaac Newton (s. XVII) está considerado como uno de los científicos más importantes de la historia. Sus estudios sobre la dinámica física unificaron la mecánica celeste y la terrestre, sentando las bases de la mecánica clásica. Pero sus contribuciones a las ciencias fueron muy amplias, investigó la naturaleza de la luz, distintos fenómenos ópticos e incluso, fue partícipe del nacimiento del cálculo diferencial e integral.

2.1.1. PRIMER PRINCIPIO DE LA DINÁMICA

Todo cuerpo permanece en reposo o en movimiento rectilineo y uniforme si no influye ninguna fuerza sobre él. Los sistemas de referencia desde los cuales se ven así las cosas se llaman inerciales. Otra forma de enunciar la primera ley de Newton podría ser: *Una partícula libre (aquellas que no sufren inguna interacción) se mueve siempre con velocidad constante o sin aceleración.*

Dado que de modo directo no se puede constatar esta ley, se utiliza la demostración inversa, esto es, un cuerpo abandona el reposo o el MRU es porque hay una fuerza que le induce a ello. Así, una bola impulsada sobre una superficie pulida tarda más en pararse que sobre una superficie rugosa, de esta forma el concepto de fuerza comienza a relacionarse con la velocidad.

Se define el **momento lineal** como una magnitud vectorial que tiene la misma dirección que la velocidad y cuya expresión matemática es:

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \Longrightarrow \qquad [p] = kg \cdot \frac{m}{s}$$

El uso del momento lineal permite enunciar la primera ley de Newton como *Una particula libre siempre se mueve con momento lineal constante.*

Cualquier observador inercial se da cuenta inmediatamente que la interacción de dos particulas libres provoca un cambio en sus velocidades individuales y en sus trayectorias, pero que independientemente del momento en que realizemos la observación siempre se encuentra que el conjunto del momento lineal de las dos partículas se conserva,

$$\boxed{\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{despues}}$$

De esta forma podemos enunciar **el principio de conservación del momento lineal**, *El momento lineal total de un sistema compuesto por partículas sujetas unicamente a interacciones mutuas permanece constante.*

2.1.2. SEGUNDO PRINCIPIO DE LA DINÁMICA

Puesto que el movimiento de una partícula se relaciona dificilmente con el cambio de momento lineal, se crea el concepto de Fuerza. La fuerza, fisicamente, se considera le expresión de una interacción. Definida como,

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}}$$

Si la partícula es libre, $\vec{p} = 0$ y $\vec{F} = 0$. La aplicación de una fuerza sobre un cuerpo genera una aceleración, y puesto que la aceleración es una magnitud vectorial, la fuerza también es una magnitud vectorial con la misma dirección que el vector aceleración. Por tanto, las fuerzas además de tener un valor númerico, esto es, un módulo, también se ejercen según una dirección y en un sentido, de ahí que las fuerzas se representen con un vector.

La unidad en el sistema internacional que mide la fuerza es en Newton (N), $N = kg \cdot \frac{m}{s^2}$.

La rapidez con la que varía el momento lineal de un cuerpo es una medida de la fuerza que actúa sobre él. Se define el **impulso mecánico** como el producto de la fuerza por el tiempo que actúa la fuerza sobre el sistema, entonces, podemos definir al impulso como la variación del momento lineal,

$$\vec{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}\Delta t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}$$

El impulso mecánico es una magnitud vectorial de igual dirección y sentido que la fuerza aplicada; en el SI de unidades la unidad del impulso mecánico es $N \cdot s$.

2.1.3. TERCER PRINCIPIO DE LA DINÁMICA

Denominado principio de acción y reacción enuncia que *cuando dos cuerpos interaccionan, se ejercen mutuamente fuerzas iguales y de sentidos opuestos*. Matematicamente podemos dividir entre Δt la expresión que relaciona el cambio de momento lineal en el sistema de dos partículas y hacemos el límite funcional (la derivada), tenemos,

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2 \quad ; \quad \frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} \rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Donde $\vec{F}_1$ es la fuerza sobre la partícula 1 debido a su interacción con la partícula 2 y $\vec{F}_2$ es la fuerza sobre la partícula 2 debido a su interacción con la partícula 1. Si $m_2 >> m_1$ tenemos que la relación entre sus velocidades será $v_2 << v_1$ y podemos suponer que la la partícula 2 permanece en reposo en un sistema de referencia inercial y se habla del momiento de la partícula 1 bajo la acción de la fuerza 2, siendo ésta función de la velocidad y de m_1 solamente. Este hecho se da por ejemplo en el movimiento de los electrones alrededor del núcleo.

2.2. TIPOS DE FUERZAS

2.2.1. PESO

En las próximidades de la superficie terrestre todos los cuerpos caen con la misma aceleración, la gravedad. Por tanto, de acuerdo con la segunda ley de Newton, sobre ellos se ejerce una fuerza. Esta fuerza es la que conocemos como **Peso**, es decir, la fuerza con que la tierra atrae a los cuerpos.

$$\boxed{P = mg}$$

El peso es una magnitud vectorial con dirección vertical y sentido hacía el centro de la tierra, varía según varía el valor de g, se mide con un dinamómetro. La masa, sin embargo, es una magnitud escalar y no varía aunque cambie su estado de agragación o la temperatura, es una propiedad de los cuerpos.

2.2.2. NORMAL

Es una fuerza que aparece como consecuencia del tercer principio de Newton, es una fuerza de contacto entre cuerpos que interaccionan, ejerciencose entre sí fuerzas iguales pero de sentidos opuestos. Es siempre perpendicular a la superficie de contacto y dirigida hacía el cuerpo que ejerce la fuerza principal. Por ejemplo, un bloque de cemento ejerce su peso sobre el suelo, entonces el suelo ejerce una fuerza de reacción denominada **Normal** de igual valor al que ejerce el bloque sobre el suelo, pero de sentido contrario y que equilibran el conjunto.

$$\boxed{N = P = mg}$$

2.2.3. FUERZA de ROZAMIENTO

Estas se oponen al movimiento (tanto por deslizamiento como por rodamiento) de un cuerpo sobre otro. Experimentalmente se comprueba que es directamente proporcional a la fuerza Normal, siendo su constante de proporcionalidad el coeficiente de rozamiento, μ. (Este coeficiente depende de la naturaleza del material de contacto y de su grado de rugosidad)

$$\boxed{F_r = \mu N = \mu mg}$$

Existen dos coeficientes de rozamiento, el estático y el dinámico, μ_e y μ_c, respectivamente. Como $\mu_e > \mu_c$ significa que la fuerza necesaria para iniciar el movimiento de un cuerpo es mayor que la necesaria para mantenerlo en movimiento.

2.2.4. FUERZA CENTRÍPETA

Esta fuerza es la responsable del movimiento circular uniforme. La aceleración que tiene lugar en un movimiento circular uniforme es la aceleración normal o centrípeta y es consecuencia del cambio de dirección del vector velocidad. La fuerza centrípeta está dirigida siempre hacía el centro de la trayectoria. Su valor se calcula como:

$$\boxed{F_c = ma_c = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R}$$

Siendo R el radio de la circunferencia, v la velocidad lineal y ω la velocidad angular. Si tuvieramos un MCUA, el módulo de la fuerza centrípeta no sería constante por que cambia el valor del módulo de la velocidad.

2.2.5. FUERZA ELÁSTICA

Este tipo de fuerzas hacen referencia a las fuerzas que tienen lugar cuando deformamos un material elástico, por ejemplo una pelota de goma o como utilizaremos más habitualmente, un muelle. Así, por acción de una fuerza, el muelle o experimenta un alargamiento o una compresión hasta que cesa la fuerza.

Según aumenta el alargamiento o la compresión hay que efectuar más fuerza, por tanto, la fuerza es proporcional al desplazamiento producido sobre el muelle. Según la Ley de Hooke: La deformación de un muelle elástico es proporcional a la fuerza deformadora,

$$\boxed{F = -k\Delta x}$$

siendo k, la constante del muelle (depende del material elástico) y Δx la deformación producida sobre el muelle.

2.2.5.1. OSCILADOR ARMÓNICO

Un movimiento armónico simple, MAS, es un movimiento producido por una fuerza variable proporcional y de sentido contrario al desplazamiento. Por tanto, el MAS, es un movimiento producido por una fuerza recuperadora.

Por ejemplo, cuando un muelle, en posición vertical y en equilibrio, soporta una masa y áctua sobre él una fuerza que aleja al sistema del equilibrio, se produce una fuerza recuperadora en sentido contrario de modo que, cuando deje de actuar esa fuerza desequilibrante, sólo actuará esa fuerza restauradora sobre el conjunto.

Aplicando la segunda Ley de Newton sobre el sistema anterior, en el que la única fuerza responsable del movimiento es la de la Ley de Hooke, y teniendo en cuenta las variables cinemáticas del oscilador armónico simple, podemos encontrar el periodo de las oscilaciones del muelle.

$$\Sigma F = ma \;\Rightarrow\; -kx = ma = -m\omega^2 x \;\Rightarrow\; k = m\omega^2$$

ya que $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Analizando la expresión, observamos que el periodo de las oscilaciones será mayor cuanto mayor es la masa del cuerpo, es decir, tomará más tiempo en realizar una oscilación.

2.3. APLICACIONES

En el estudio dinámico de cualquier sistema físico hay que determinar las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo. Hay que tener claro que sobre un cuerpo se ejercen fuerzas mediante contacto físico con él (empujándolo, tirando con una cuerda,...) o a distancia (fuerza gravitatoria, fuerza eléctrica, ...) y una vez que deja de existir la fuerza, cesa la acción.

Si sobre un cuerpo actúan más de una fuerza, al ser éstas magnitudes vectoriales, deben sumarse, y el conjunto de ellas provocará un cambio de velocidad (o no) en el cuerpo. Esto es,

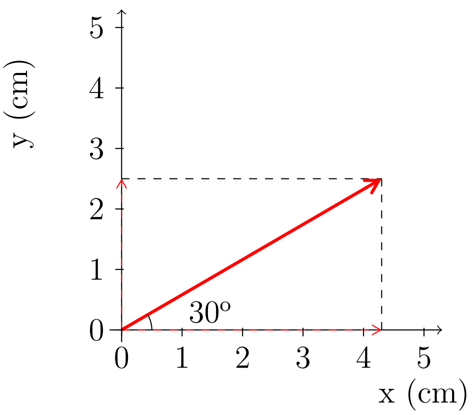
$$\sum F = m\vec{a}$$

La suma se debe de realizar sobre cada uno de los ejes cartesianos puesto que las fuerzas deben descomponerse en los ejes utilizando los ángulos que formen con ellos. Por ejemplo,

2.3.1. FUERZA EJERCIENDO UN ÁNGULO

Se tiene una fuerza de 25 N formando un ángulo de 30º con la horizontal. Dibuja el vector correspondiente y sus componentes. Analíticamente da el resultado numérico de cada componente.

Este ejercicio permite aprender a realizar la descomposición de fuerzas, primero dibujamos la fuerza y posteriormente la descomponemos en sus dos componentes, la del eje x y la del eje y.



Recordando las funciones trigonométricas, hallamos las componentes x e y de la fuerza,

$$F_x = F \cdot \cos 30 = 21,6 \; N$$

$$F_y = F \cdot \sin 30 = 12,5 \; N$$

2.3.2. FUERZAS EN SISTEMAS

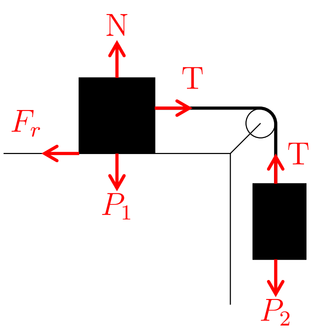
Dibuja el diagrama de fuerzas, incluyendo la fuerza de rozamiento y realizando la descomposición de aquellas fuerzas que lo requieran. *NOTA: Como ejercicio voluntario, intentar dar el valor de la aceleración de cada sistema.*

En ambos casos tendríamos el peso (siempre vertical), la fuerza de rozamiento (opuesta al movimiento) y la normal (perpendicular a la superficie de contacto). Particularmente, en el caso **a** aparece la tensión (cuyo sentido es del bloque a la cuerda) y en el **b** hay que tener en cuenta la rotación de los ejes cartesianos, esto provoca que el peso no quede sobre el eje de ordenadas y por tanto tengamos que descomponerla en el eje x e y.

Para hallar el valor de la aceleración partimos en ambos casos de la segunda ley de Newton $\Sigma F = m \cdot a$.

$$Primer\ cuerpo \Rightarrow T - F_r = m_1 a$$

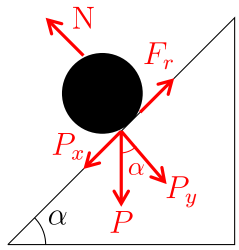
$$Segundo\ cuerpo \Rightarrow P_2 - T = m_2 a$$



Al estar ambos cuerpos unidos por una cuerda tienen la misma aceleración, la polea no tiene masa y, por tanto, las tensiones son iguales pero de sentido contrario.

$$P_2 - m_1 a - F_r = m_2 a$$

$$\boxed{a = \frac{m_2 g - F_r}{m_1 + m_2}}$$



En este segundo sistema tenemos una esfera deslizando por un plano inclinado. A la hora de resolver el sistema, los ejes se colocan rotados de igual forma qye el ángulo del plano inclinado, así, el eje de abcisas queda paralelo al plano de rodadura.

Como vemos en el dibujo, todas las fuerzas implicadas en el sistema se encuentran paralelas a alguno de los ejes cartesianos excepto el peso (que siempre es vertical). Entonces, al aplicar la segunda ley de Newton, el peso se debe descomponer en los nuevos ejes, quedando

$$Eje\ x \Rightarrow P_x - F_r = ma_x$$

$$Eje\ y \Rightarrow P_y - N = ma_y \rightarrow N = P_y = mg\cos\alpha$$

Quedando la aceleración restringida al eje x ($a_y = 0$) y sabiendo que $F_r = \mu N$, nos queda

$$mg\sin\alpha - F_r = ma$$

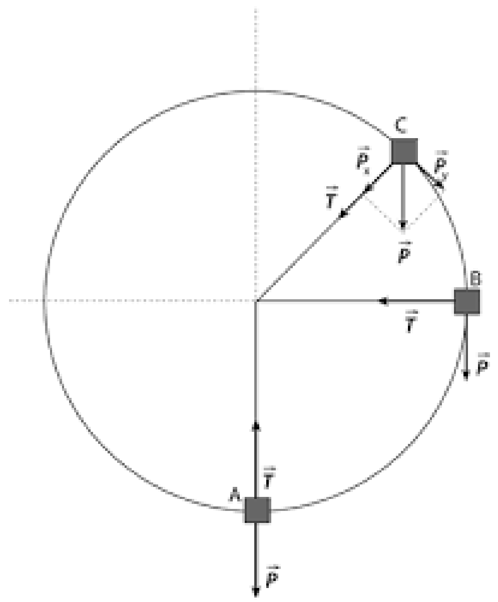
$$\boxed{a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

2.3.3. MOVIMIENTOS CIRCULARES VERTICALES

En los movimientos circulares donde una piedra esta atada a una cuerda sólo tenemos dos fuerzas para descomponer en los ejes cartesianos, son el peso, P, que apunta siempre verticalmente al suelo y hacia abajo y la tensión de la cuerda, T, que apunta siempre hacia el centro de la trayectoria. Tomamos como ejes:

- El X, tangente a la trayectoria (dirección de la velocidad)
- El Y, en dirección perpendicular a la tangente. Es decir según dirección del radio de la circunferencia.

Descomponemos el peso y la tensión según los ejes considerados y aplicamos el segundo principio de la dinámica, teniendo en cuenta que en este caso la aceleración no es la tangencial sino que estamos con la aceleración normal.



2.3.4. EL PÉNDULO

En un péndulo la única fuerza que actúa es el peso. Si descomponemos el peso en sus componentes tangencial y normal, la componente tangencial es la que dará lugar a la aceleración del movimiento ya que la normal se verá contrarestada por la tensión del hilo. Si además nos movemos en el dominio paraxial, ángulos muy pequeños, podemos tomar que el $\sin\theta = \theta$ y tener entonces, un movimiento armónico simple.

$$\Sigma F = ma \;\Rightarrow\; -mg\theta = -m\omega^2 x \;\Rightarrow\; \boxed{\omega^2 = \frac{g}{l}}$$

Teniendo en cuenta la relación entre la pulsación y el periódo, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, el periódo de oscilación de un péndulo es,

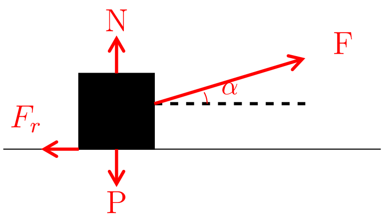
$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

2.4. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un bloque de 5 kg de masa se mueve con una aceleración de 2,5 m/s^2 por una mesa horizontal bajo la acción de una fuerza de 20 N que forma un ángulo de 30º con la horizontal. Averigua:

   a) La fuerza de rozamiento entre el cuerpo y el plano.

   b) Sabiendo que la fuerza de rozamiento es $F_r = \mu N$, siendo μ el coeficiente de rozamiento y N la normal. Halla el coeficiente de rozamiento.



   a) Una vez dibujado el sistema podemos ver más claramente cuál es la resultante de las fuerzas y poder aplicar la segunda ley de Newton. Como vemos, tenemos una fuerza que forma un ángulo con la horizontal de 30º, esto provoca que tengamos que descomponer la fuerza en los ejes x e y.

$$F_x = F \cdot \cos\alpha = F \cdot \cos 30 = 17,32\ N$$
$$F_y = F \cdot \sin\alpha = F \cdot \sin 30 = 10\ N$$

   El enunciado nos dice que el bloque se mueve sobre la mesa, esto es, sobre el eje Ox, por tanto, no existe aceleración en el eje y. Sólo tenemos movimiento sobre el eje x, aplicando la segunda ley de Newton,

$$\Sigma F = ma \Longrightarrow F\cos\alpha - F_r = ma$$
$$F_r = F\cos\alpha - ma = 20 \cdot \cos 30^o - 5 \cdot 2,5 = 4,8\ N$$

   b) Para hallar este apartado tenemos que ver cuanto vale la normal, por tanto tenemos que plantear la segunda ley de Newton sobre el eje y,

$$\Sigma F = ma \Longrightarrow F\sin\alpha + N - P = ma \stackrel{a=0}{\Longrightarrow} N = P - F\sin\alpha$$

   Siendo el valor del coeficiente de rozamiento,

$$F_r = \mu N = \mu(P - F\sin\alpha) \Rightarrow \mu = \frac{F_r}{P - F\sin\alpha} = \frac{4,8}{50 - 20\sin 30} = 0,12$$

2. Se tiene una polea simple de la que cuelgan dos bloques de masas 1 kg y 2 kg. DATO: g= 10 m/s^2.

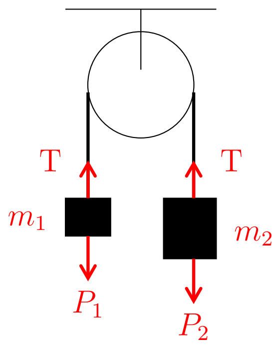
   a) Dibuja un esquema de la situación en el que aparezcan las fuerza implicadas.

   b) Calcula el valor de la aceleración del sistema.

   c) Si el bloque de 2 kg se encuentra suspendido inicialmente a 4 metros del suelo, ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar el suelo desde su posición inicial?

   d) ¿Cúal será la velocidad de ese bloque en el instante en que llega al suelo?

   a) Dibujamos nuestro sistema físico y ponemos las fuerzas que aparecen en el sistema.



   b) Aplicando a las dos masas la 2ª ley de Newton

$$T - P_1 = m_1 a$$

$$P_2 - T = m_2 a$$

   Tenemos 2 ecuaciones con 2 incognitas (T, a), resolviendo el sistema

$$P_2 - P_1 = (m_1 + m_2)a \Longrightarrow a = \frac{P_2 - P_1}{(m_1 + m_2)} = 3,3\ m/s^2$$

   c) Como ya sabemos la aceleración que tiene el sistema, para hallar el tiempo que tarda en llegar al suelo tenemos que aplicar una expresión matemática correspondiente a un M.R.U.A.

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Tomando el $s_0 = 0\ m$ y $v_0 = 0\ m/s$, nos queda,

$$4 = \frac{1}{2} \cdot 3,1 \cdot t^2 \longrightarrow t = \sqrt{\frac{8}{3,3}} = 1,5\ s$$

d) Igual que antes debes utilizar las expresiones de un M.R.U.A., tomando $v_0 = 0\ m/s$,la velocidad en el instante que llega al suelo es,

$$v = v_0 + at \Longrightarrow v = 3,3 \cdot 1,5 = 4,95\ m/s$$

3. Un piloto acrobático sigue una trayectoria circular de radio 2000 m en un plano vertical con velocidad de 540 kmh^{-1}. Su masa es de 70 kg y lleva una báscula en el asiento.

   a) ¿Qué marca la báscula en el punto más alto y más bajo de la trayectoria?
   b) ¿Con qué velocidad ha de pasar por el punto más alto para que la báscula marque cero?

   a) En este problema hay que tener en cuenta que la fuerza centrípeta es el resultado de la suma de todas las fuerzas que existen en cada instante y que la normal, es la medida de la báscula. Así pues, en el punto más alto,

   $$F_c = N + P \ \Rightarrow\ N = \frac{mv^2}{R} - mg = 101,5\ N$$

   Y en el punto más bajo se tiene

   $$F_c = N - P \ \Rightarrow\ N = \frac{mv^2}{R} + mg = 1473,5\ N$$

   b) En este caso, la normal debe ser cero. Es decir,

   $$F_c = P \ \Rightarrow\ \frac{mv^2}{R} = mg \ \Rightarrow\ v = 140\ ms^{-1}$$

4. Una masa de 5 kg se cuelga del extremo de un muelle elástico vertical, cuyo extremo esta fijo al techo. La masa comienza a vibrar con un periodo de 2 segundos. Hallar la constante elástica del muelle.

   A partir del periódo de oscilación de un muelle y con los datos del enunciado, podemos despejar directamente la constante elástica del muelle.

   $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \ \Rightarrow\ k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = 49,3\ \frac{N}{m}$$

Capítulo 3

TRABAJO Y ENERGÍA

Cuando decimos que algo o alguien tiene energía nos estamos refiriendo a una capacidad que tiene el objeto o la persona para moverse, sin embargo, en Física y Química, **la energía se define como la capacidad que posee un cuerpo para producir transformaciones sobre si mismo o sobre el entorno**.

Desde esta perspectiva los animales tienen una gran energía ya que tenemos la capacidad para transformar la energía de los alimentos en energía química y física que nos permite movernos o mantener la temperatura corporal. Algunas formas de energía son, la energía cinética (E_c, que depende de la velocidad), energía potencial (E_p, debida a la posición de los cuerpos y que puede ser gravitatoria o elástica), energía eléctrica (E_e, relacionada con la intensidad de corriente eléctrica y el voltaje), $\cdots$

Las unidades de energía que se utilizan en el S.I. son el julio (J). Pero también se utilizan el kilojulio (kJ), la caloría (cal, siendo 1 cal=4,18 J) y la kilocaloria o el kiloWatio-hora (kWh, con 1 kWh=3600000 J).

Puesto que no existe un sistema aislado, cualquier cambio que ocurra en un sistema tendrá una repercusión en el entorno; por tanto siempre existe intercambio de energía, ya sea en el mismo sistema o con otros, cuando un sistema aumenta o diminuye la energía siempre habrá otro que hará la contrario. Es imposible obtener energía de la nada. La energía de un sistema no puede aumentar a no ser que tome energía de otro sistema. Por tanto, frase para la posteridad:

La energía total del Universo ni se crea ni se destruye, tan sólo se transforma. La energía total se conserva.

Cuando sostenemos en la palma de la mano cualquier objeto se esta realizando un *esfuerzo*, ahora bien, si levantamos el objeto entonces se esta realizando un *tra-*

bajo; por tanto, **el trabajo se define como la transformación que produce una fuerza, esto es, se habla de trabajo cuando una fuerza transmite una energía.** Como vemos, energía y trabajo están extrechamente relacionadas.

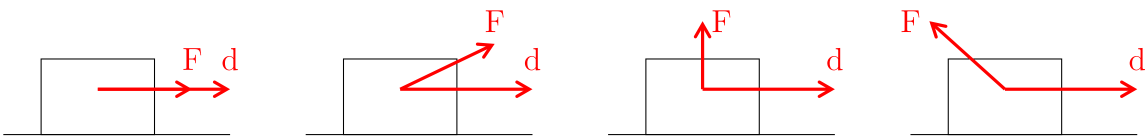
Un objeto pierde energía cuando realiza trabajo (signo negativo para el trabajo) y gana energía cuando cuando se realiza trabajo sobre él (signo positivo para el trabajo).

Al igual que ocurre con la energía existen distintas formas de trabajo, pero para que exista trabajo mecánico siempre tiene que existir una fuerza aplicada sobre un objeto y que alguna de las componentes de la fuerza produzca un desplazamiento del objeto. El **trabajo mecánico** se define como W y su expresión es,

$$\boxed{W = Fd\cos\alpha \;\; = F_x d}$$

Donde F es la fuerza aplicada, $d = (x_f - x_0)$ el desplazamiento que sufre el objeto y α se corresponderia con el ángulo que forma la fuerza con la dirección del desplazamiento, de ahí que $F_x = F\cos\alpha$.

Como vemos, el trabajo es una magnitud escalar, la unidad de trabajo en el S.I. es el Julio (J), esto es, 1 J es el trabajo necesario para mover un cuerpo 1 metro aplicando sobre él 1 N de fuerza.



$\alpha = 0^o$	$0 < \alpha < 90^o$	$\alpha = 90^o$	$90^o < \alpha < 180^o$
$\cos\alpha = 1$	$\cos\alpha > 0$	$\cos\alpha = 0$	$\cos\alpha < 0$
W máximo	$W > 0$	W $= 0$	$W < 0$

Cuando actúan varias fuerzas sobre un mismo cuerpo, el trabajo realizado por esas fuerzas es el mismo que el realizado por la resultante de todas ellas. Recordar, el trabajo de rozamiento siempre es negativo, por tanto, siempre se opone al movimiento y disminuye el rendimiento de cualquier máquina.

3.1. TIPOS DE ENERGÍA

3.1.1. ENERGÍA CINÉTICA

La energía que posee un cuerpo que se mueve recibe el nombre de energía cinética. Si el cuerpo parte del reposo y adquiere una velocidad (MRUA), sustituyendo en la expresión fundamental de la dinámica de traslación,

$$v^2 = 2ad \rightarrow a = \frac{v^2}{2d} \overset{F=ma}{\longrightarrow} Fd = \frac{1}{2}mv^2$$

El primer miembro de la ecuación representa la energía transmitida por la fuerza en forma de trabajo. El segundo miembro representa la energía en forma de movimiento que recibe el cuerpo. Por tanto, vemos que trabajo y energía son aspectos de una misma identidad y que la expresión de la energía cinética viene dada por:

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$$

Haciendo uso de integrales (aunque aún no las hemos estudiado) nos quedaría:

$$dW = F_T ds = m\frac{dv}{dt}ds = mv \cdot dv \longrightarrow W_{AB} = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = E_{cB} - E_{cA} = \Delta E_c$$

Observar que la energía cnética se puede expresar en función de la cantidad de movimiento, $E_c = \frac{p^2}{2m}$
Como conclusión a la deducción anterior se enuncia **el teorema de las fuerzas vivas**, *el trabajo realizado por una fuerza al desplazarse su punto de aplicación entre dos posiciones es igual al incremento que experimenta la energía cinética del cuerpo sobre la que actúa.*

$$\boxed{W = \Delta E_c = E_{c2} - E_{c1}}$$

3.1.2. ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

Esta energía es consecuencia de la posición que ocupa un cuerpo en el campo gravitatorio. Si tenemos un cuerpo a una cierta altura y se queda libre, éste es capaz de realizar trabajo cuando llegue al suelo. Partiendo de la ecuación fundamental de la dinámica de traslación,

$$W = Fd = F(h_1 - h_0) \overset{F=mg}{\longrightarrow} Fd = mg(h_1 - h_0) = mgh_1 - mgh_0 \Rightarrow \boxed{W = \Delta E_p}$$

Siendo h_1 y h_2 las alturas respecto del suelo y donde la energía potencial es,

$$\boxed{E_p = mgh}$$

NOTA: Un objeto situado en el suelo no posee enegía potencial gravitatoria y por tanto, no tiene capacidad para realizar trabajo.

3.1.3. ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA

Esta energía es característica de los cuerpos elásticos. Éstos, tienen la capacidad de almacenar energía al experimentar deformaciones para posteriormente volver a su posición de equilibrio. Ya hemos visto que la fuerza que tienen este tipo de cuerpos viene dada por la ley de Hooke, por tanto, la capacidad para realizar trabajo por estos cuerpos estará dado por,

$$F_{hooke} = k(x_f - x_0) \rightarrow W = Fx = \frac{1}{2}kx^2$$

Siendo x el valor de la longitud de deformación. El término 1/2 aparece como consecuencia de tomar medidas medias en las longitudes. Por tanto, la expresión que representa la energía potencial elástica es,

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}kx^2}$$

3.2. PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Este principio tiene como base la capacidad que tienen los cuerpos para transformar la *energía mecánica*. En los tipos de energía descritos anteriormente el trabajo realizado para desplazar una particula entre dos puntos es independiente de la trayectoria seguida entre tales puntos, esto es consecuencia de las fuerzas utilizadas para hallar el trabajo. A este tipo de fuerzas se denominan fuerzas conservativas y generan la madre de todas las leyes, **La ley de la conservación de la energía**. Por tanto, la suma de las energías cinética y potencial (ya sea una o ambas de las vistas) recibe el nombre de **energía mecánica** ($E_m = E_c + E_p$). Como hemos visto en los anteriores apartados, la variación de energía en cualquiera de sus variedades da el trabajo realizado por el sistema, por tanto

$$W = \Delta E_m = E_f - E_i = (E_c + E_p)_f - (E_c + E_p)_i$$

Si sobre el sistema no se realiza ningún trabajo y el sistema no realiza trabajo sobre el exterior, W=0 y $\Delta E_m = 0$ (prácticamente imposible) y la energía mecánica se conserva. Dicho de otra manera, si sobre un sistema solamente actúan fuerzas gravitatorias y elásticas, la energía mecánica del sistema permanece constante.

$$Si\ W = 0 \Longrightarrow E_m = E_c + E_p = cte$$

Si un sistema transfiere energía a otro (por rozamiento u otra causa), la energía mecánica no se conserva. Supongamos ahora un sistema en el que, además de fuerzas conservativas, aparecen fuerzas no conservativas como las de rozamiento. El trabajo realizado sobre dicho sistema se transformará en energía mecánica (cinética y potencial) y en trabajo de rozamiento.

$$\Delta E_m = W_{roz}$$

3.3. ENERGÍA DEL OSCILADOR ARMÓNICO

Cualquier cuerpo sometido a un movimiento armónico tiene energía cinética y potencial. Por el mero hecho de tener movimiento, presenta energía cinética. Sin embargo, la energía potencial, es consecuencia de la fuerza conservativa presente en el oscilador mecánico.

La **energía cinética** del oscilador viene dada por la sustitución de términos cinéticos del oscilador en la propia definición de la energía,

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mk\left(A^2 - x^2\right) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t - \phi)$$

La expresión muestra como la energía cinética es periódica, tiene su valor máximo en el centro y mínimo en los extremos.

La **energía potencial** se corresponde con la energía potencial elástica, por tanto,

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t - \phi)$$

Siendo periódica pero con su valor máximo en los extremos y mínimo, en el centro.

La suma de ambas energías nos permite deducir la **energía mecánica** del oscilador. Analizando la expresión podemos confirmar que la energía total depende de las propiedades del oscilador, como son la constante elástica y la amplitud.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

3.4. POTENCIA

Una de las características más importantes de una máquina simple es la potencia (P). La potencia mide la eficacia de una máquina y relaciona el trabajo que desarrolla ésta con el tiempo que tarda en realizarlo. Por tanto, una fuerza es más eficaz (que no tiene por que ser eficiente) cuanto menor sea el tiempo empleado en transmitir la energía. Su expresión es,

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fd}{t} = Fv_m$$

Su unidad en el S.I. es el Watio aunque también se utiliza mucho el kilowatio y el caballo de vapor (CV), 1 CV=735,5 W. El Kw h es una unidad de trabajo, **no** de potencia.

El trabajo realizado en venir al instituto es el mismo si tardas 10 minutos que si tardas 2 horas, por tanto, la potencia mide la rapidez con la que se produce el trabajo. A mayor potencia más eficaz es el trabajo realizado.

3.5. RENDIMIENTO ENERGÉTICO

No toda la energía que consume un motor se transforma en energía útil. La energía se degrada fundamentalmente en calor y ruido. Los costes para recuperarla son altísimos y prácticamente inviables, de ahí que ningún aparato eléctrico tenga un mecánismo para recuperarla pero, ¿conocéis algun aparato que realice esta transformación?.

El rendimiento energético se define como la razón entre el trabajo que realiza (trabajo útil) y la energía consumida () en tanto por ciento, esto significa que no lleva unidades.

$$R(\%) = 100\frac{W_r}{E_c} \quad o \qquad R(\%) = 100\frac{P_r}{P_c}$$

Para hacernos una idea el cuerpo humano tiene un 10 % de rendimiento, un motor de gasolina un 25 %, de gasoil 35 % y el motor eléctrico un 80 %. El rendimiento de los motores eléctricos es muy superior al de los motores de los automóviles.

3.6. CHOQUES O COLISIONES

Una vez visto la conservación del momento lineal y la conservación de la energía cinética, estamos en condiciones de estudiar los fenómenos de colisiones. Una colisión entre dos particulas provoca una alteración de su movimiento produciendo un intercambio de momento y de energía. Se habla de *dispersión* cuando el choque de las partículas mantiene las mismas partículas que en el inicio y se habla de *reacción* cuando las particulas finales no son identicas a las iniciales.

3.6.1. CHOQUE ELÁSTICO

Supongamos dos particulas moviendose con velocidad constante en la misma dirección que chocan. Antes y después de la colisión,al no existir fuerzas exteriores, se conserva la cantidad de movimiento del sistema y la energía totalde ambas partículas. Así pues, si denotamos con una (') a las magnitudes despues del choque, tendremos que las leyes de conservaciones antes y depués del choque serán

$$\textit{Cantidad de movimiento} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1^{'} + m_2 v_2^{'}$$

$$\textit{Conservaión de la energía} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$

Tenemos un sistema de ecuaciones que la sustituimos por,

$$m_1(v_1 - v_1^{'}) = m_2(v_2^{'} - v_2)$$

$$m_1(v_1^2 - v'^2_1) = m_2(v'^2_2 - v_2^2)$$

Dividiendo la segunda ecuación por la primera y manteniendo la primera ecuación,

$$m_1(v_1 - v_1^{'}) = m_2(v_2^{'} - v_2)$$

$$v_1 + v_1^{'} = v_2^{'} + v_2$$

Despejando $v_2^{'}$ y sustituyendo en la primera permite hallar la velocidad de salida de cada partícula,

$$v_1^{'} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$v_2^{'} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

Si ambas partículas poseen la misma masa, entonces $v_1^{'} = v_2$ y $v_2^{'} = v_1$, las dos partículas intrecambian sus velocidades.

De estas dos ecuaciones podemos sacar aún más conclusiones que las dejo para vosotros. Por ejemplo, que ocurre si una de las dos partículas esta en reposo ($v_2 = 0$), y si además las masas de ambas son iguales. Muchas veces una masa es mucho mayor que otra, evaluarlo para $m_2 >> m_1$.

3.6.2. CHOQUE INELÁSTICO

La diferencia con un choque elástico estriba en que como consecuencia de la colisión las dos partículas quedan incrustadas en una única masa. Por ejemplo, una bala de masa m y velocidad v que se incrusta en un bloque de masa M en reposo (péndulo balístico). La cantidad de movimiento y la energía cinética antes del choque teniendo en cuenta que el bloque esta en reposo es,

$$p_i = mv \qquad E_{ci} = \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{p_i^2}{2m}$$

Después del choque, ambos cuerpos se mueven juntos,

$$p_f = (m+M)v^{'} \qquad E_{cf} = \frac{1}{2}(m+M)v^{'2} = \frac{p_f^2}{2(m+M)}$$

Podemos sacar la velocidad con la que salen aplicando el principio de conservación del momento lineal,

$$p_i = p_f \Longrightarrow v^{'} = \frac{m}{m+M}v \Longrightarrow E_{cf} = \frac{p_i^2}{2(m+M)}$$

Como después del choque la energía total se conserva, el pendulo adquirirá una altura, h, dada por,

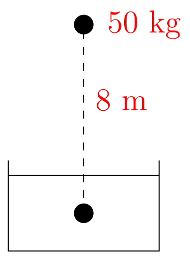
$$E_p = E_{cf} \Rightarrow (m+M)gh = \frac{m^2v^2}{2(m+M)} \Rightarrow \boxed{h = \frac{m^2v^2}{2(m+M)^2g}}$$

De aquí también podemos depejar la velocidad para hallar la velocidad de impacto sabiendo que altura ha subido el sistema,

$$\boxed{v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}}$$

3.7. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Una esfera metálica de 50 kg se deja caer desde una altura de 8 metros a un suelo arenoso. La esfera penetra en la arena 30 cm, halla la fuerza de resistencia ejercida por la arena.



Como siempre, primeros hacemos el dibujo de la situación descrita en el problema para observar con más notoriedad lo que nos está pidiendo el problema.

La fuerza que están pidiendo es de rozamiento de la arena con la esfera, lo que provoca su detención y por tanto, esta fuerza debe ser negativa.

Teniendo en cuenta que $W = \Delta E_p$, nos queda,

$$W = E_{pf} - E_{pi} = mgh_f - mgh_i \xrightarrow{h_f=0} = -mgh_i = 50 \cdot 10 \cdot 8 = -4000 \ J$$

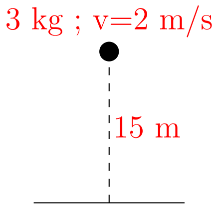
Esta energía potencial es la que se va ha emplear en realizar un trabajo. En el caso que tenemos, ese trabajo es el correspondiente a la penetración de la esfera en la arena. Como la fuerza de rozamiento se opone al movimiento su signo debe ser negativo,

$$W = \Delta E_p \rightarrow Fd = -4000 \longrightarrow F = \frac{4000}{0,3} = 13333,3 \ N$$

2. Desde una altura de 15 metros se lanza verticalmente hacia abajo un objeto de 3 kg de masa, con una velocidad inicial de 2 m/s. Si no existe rozamiento con el aire. Hallar:

   a) La energía cinética a 5 metros del suelo.

   b) La velocidad en ese momento y con la que llega al suelo.



Lo primero es calcular la energía mecánica que tiene en el momento del lanzamiento,

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = 456 \ J$$

a) Ahora sabiendo que la energía mecánica se conserva, podemos hallar en cualquier punto de la trayectoria la velocidad. En este caso, nos lo piden a los 5 metros antes de llegar al suelo. Entonces,

$$E_{m1} = E_{m2} \rightarrow 456 = E_{c2} + 150 \Longrightarrow= E_{c2} = 306\ J$$

b) Por tanto, la velocidad a los 5 metros del suelo será de,

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = 14,3\ m/s$$

Haciendo los mismos pasos que en el apartado a, pero teniendo en cuenta que la energía potencial en el suelo es cero (por tener alura cero), la velocidad cuando golpea el suelo es de,

$$E_{m1} = E_{m3} \rightarrow E_{c3} = 456\ J$$

$$\boxed{v_3 = \sqrt{\frac{2E_{c3}}{m}} = 17,4\ m/s}$$

3. Si la potencia de un ciclista es de 450 W, calcula cuál sería la velocidad que alcanzaría al cabo de 6 s de pedalear si en un principio se encontraba parado. ($m_{total} = 85\ kg$).

   Recordemos que la potencia es una medida de la rapidez con la que se realiza un trabajo, por tanto, matemáticamente se representa como la razón entre el trabajo realizado y el tiempo transcurrido en hacerlo.

   Sabiendo esto y teniendo en cuenta que el ciclista sufre un cambio de velocidad, estamos en condiciones de afirmar que el trabajo realizado se transforma en energía cinética, por tanto

$$P = \frac{W}{t} \rightarrow W = E_c = P \cdot t = 450 \cdot 6 = 2700\ J$$

   y la velocidad que ha adquirido el ciclista es,

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \longrightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = 8\ m/s$$

4. La constante de un muelle es 250 Nm^{-1} y se encuentra sobre una mesa, sujeto a ella por un extremo. El muelle se ha comprimido 5 cm y tiene adosado a su extremo una masa de 500 g. Calcula la velocidad del cuerpo al recuperar el muelle su longitud natural cuando se libera:

a) Si se pueden despreciar los rozamientos.

b) Si el coeficiente de rozamiento cinético entre el cuerpo y la mesa es $\mu = 0,18$.

a) La energía potencial elástica del muelle por estar comprimido es,

$$E_p = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = 0,31\ J$$

Por tanto, la energía cinética que adquiere el cuerpo cuando el muelle recupera su longitud natural es exactamente, la energía potencial elástica que tenía cuando estaba comprimido.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \ \Rightarrow\ v = 1,12\ ms^{-1}$$

b) Si existe rozamiento entre la masa y el suelo, parte de la energía potencial elástica se invierte en vencer esa fuerza de rozamiento.

$$F_r = \nu mg = 0,882\ N \ \Rightarrow\ W_{roz} = F_r\Delta x \cos 180^o = 0,0441\ J$$

Por tanto, la energía cinética que adquiere el cuerpo vendrá dada por la resta de la energía potencial elástica y el trabajo de rozamiento,

$$E_c = E_p - W_{roz} = 0,27 \ \Rightarrow\ v = 1,04\ ms^{-1}$$

5. Una masa de 200 gramos unida a un muelle de constante elástica K = 20 N/m oscila con una amplitud de 5 cm sobre una superficie horizontal sin rozamiento.

a) Calcular la energía total del sistema y la velocidad máxima de la masa.

b) Hallar la velocidad de la masa cuando la elongación sea de 3 cm.

c) Hallar la energía cinética y potencial elástica del sistema cuando el desplazamiento sea igual a 3 cm

a) La energía mecánica es,

$$E_m = \frac{1}{2}kA^2 = 0,025\ J$$

y puesto que la velocidad máxima ocurre cuando la masa pasa por la posición de equilibrio, donde la energía potencial es cero, nos queda

$$E_m = E_c = \frac{1}{2}mv^2 \ \Rightarrow\ v = 0,5\ m/s$$

b) La velocidad de la partícula es,

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 0,4\ m/s$$

siendo $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\ rad/s$.

c) Aplicando las definiciones nos queda

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 1,6 \cdot 10^{-2}\ J$$

$$E_c = \frac{1}{2}kx^2 = 9 \cdot 10^{-3}\ J$$

Capítulo 4

DINÁMICA DE ROTACIÓN

El movimiento de los electrones alrededor del núcleo, los planetas alrededor del Sol o un CD de música realizan un movimiento rotacional. El estudio de las leyes que rigen estos movimientos viene marcado por las siguientes magnitudes.

4.1. ELEMENTOS EN DINÁMICA DE ROTACIÓN

4.1.1. MOMENTO DE INERCIA

El momento de inercia es una medida de la inercia rotacional, cuanto mayor es, más difícil resulta modificar su rotación. Por tanto, cuantifica su resistencia a cambiar su estado de giro.

Un sólido rígido discreto está constituido por un número de partículas distinguibles, cuya suma nos da la masa total. Sin embargo, un sólido rígido continuo está formado por una distribución continua de masa, es decir, se compone de infinitas partículas indistinguibles de masa.

El momento de inercia depende de la masa del sólido y de la distribución de dicha masa en relación con un eje de rotación elegido.

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

Siendo r la distancia al eje (o punto) de giro. Es un magnitud escalar de unidades kgm^2. Como podemos deducir, no es una propiedad característica del objeto ya que depende de como tenga distribuida la masa y de la posición del eje de rotación.

En la tabla siguiente se dan las expresiones del momento de inercia de algunos sólidos continuos. Entre parentesis viene dado la posición del eje elegido para su calculo a partir de la expresión.

$$I = \int_v r^2 dm$$

Sólido continuo	**Momento de Inercia**
Anillo (eje pasa por el centro y $\perp$)	$I = MR^2$
Disco (eje pasa por el centro y $\perp$)	$I = \frac{1}{2}MR^2$
Esfera maciza (eje pasa por cualquier diámetro)	$I = \frac{2}{5}MR^2$
Cilindro hueco (eje pasa por el centro y longitudinal)	$I = MR^2$
Cilindro macizo (eje pasa por el centro y longitudinal)	$I = \frac{1}{2}MR^2$

4.1.2. MOMENTO ANGULAR

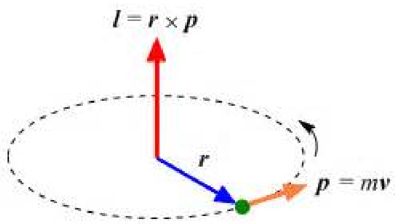
Al igual que el momento lineal en un movimiento de traslación rectilineo, se define el **momento angular** como una magnitud que mide el estado de rotación de un punto o un cuerpo. Es una magnitud vectorial que posee una partícula de masa m mientras e encuentra realizando un giro. Matemáticamente se expresa como:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$

Su valor depende del punto de referencia que se elija. Su dirección es perpendicular al plano formado por el vector de posición y velocidad de la partícula, su sentido viene dado por la regla de la mano derecha y su módulo es igual a:

$$|L| = mrv \sin\alpha$$

Donde α es el ángulo que forma $\vec{r}$ y $\vec{v}$. Su unidad en el SI es kgm^2s^{-1}.



Si el eje sobre el que se calcula el momento de inercia es el eje de giro (mayoritariamente), el momento angular se puede relacionar con el momento de inercia como,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = mr^2\vec{\omega} \Rightarrow \boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

Si estudiamos la variación del momento angular con respecto al tiempo,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Como $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ y $\vec{v}$ y $\vec{p}$ tienen la misma dirección, el primer sumando es cero. En cuanto al segundo sumando, sólo hay que recordar que se corresponde con la definición de fuerza. Así pués,

$$\frac{dL}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

Siendo $\vec{M}$, el momento respecto a un punto de las fuerzas ejercidas sobre una partícula. Su unidad en el SI es el Nm. Teniendo en cuenta la relación del momento angular y el momento de inercia, podemos llegar a la expresión denominada, **ecuación fundamental de la rotación**:

$$\boxed{\sum \vec{M} = I\vec{\alpha}}$$

4.1.3. CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

Si los momentos de las fuerzas que actúan sobre una partícula con respecto a un punto son cero o se anulan entre sí, el momento angular de la partícula con ese punto permanece constante:

$$\sum \vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte \Rightarrow L_{inicial} = L_{final}$$

Este resultado se conoce como teorema de conservación del momento angular. Para que tenga lugar está condición, la fuerza neta sobre la partícula o es nula o es paralela al vector de posición del punto donde se aplica.

La primera condición se produce cuando no existen fuerzas externas sobre el objeto (patinador girando sobre si mismo que aumenta su velocidad angular al unir sus brazos al cuerpo). La segunda condición da lugar a fuerzas que se conocen con el nombre de **fuerzas centrales**. La fuerza gravitatoria o la fuerza eléctrica son ejemplos de fuerzas centrales, éstas dirigen su campo de acción a lo largo de la línea que une los objetos que interactúan. La trayectoria que sigue la Tierra alrededor del sol es una elipse, al ser la fuerza gravitatoria una fuerza central, cuando la tierra se encuentra más cerca del sol su velocidad angular será mayor.

4.2. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Una varilla delgada de 1 metro de longitud contiene tres masas de 1 kg en cada extremo y en el centro. Calcula el momento de inercia del sistema respecto de un eje perpendicular a la varilla que pasa a través de un extremo y a través de la masa cenral. Considerar despreciable la masa de la varilla.

   Teniendo en cuenta que el momento de inercia de una partícula es $I = \sum mr^2$, realizamos los cálculos para cada caso:

   $$I_A = \sum mr^2 = m_1 r_1^2 + m_1 r_1^2 + m_1 r_1^2 = 1,3\ kgm^2$$
   $$I_B = \sum mr^2 = m_1 r_1^2 + m_1 r_1^2 + m_1 r_1^2 = 0,5\ kgm^2$$

   Este ejercicio pone de manifiesto que el momento de inercia no es una propiedad característica del objeto, depende de la distribución de masa del sólido y de como esta distribución se relaciona con el eje elegido.

2. Un patinador realiza un giro con una velocidad angular de 6 $rads^{-1}$. Si el momento de inercia del patinador es de 3 kgm^2, como varía su velocidad angular cuando acerca los brazos al cuerpo. Realizar los calculos si el momento de inercia al juntar los brazos al pecho pasa a ser de 1,5 kgm^2.

   El problema es una aplicación directa de la conservación del momento angular. Sobre el patinador no se ejerce ninguna fuerza externa, por tanto, el momento angular permanece contante y el patinador gana velocidad angular.

   $$L_{inicial} = L_{final}$$
   $$I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow \omega_f = 12\ rads^{-1}$$

3. Sobre una máquina de Atwood se encuentran suspendidas dos masas de 10 y 11 kg. Si la polea tiene una masa de 1 kg y un radio de 0,5 m. Calcular la aceleración del sistema.

   Hasta ahora despreciabamos la masa de la polea y tan sólo utilizabamos la expresión fundamental de la dinámica de traslación, $\sum F = ma$. Sin embargo, en este problema no podemos despreciar el valor de la masa de la polea y por tanto, también habrá que tener en cuenta la expresión fundamental de la dinámica de rotación $\sum M = I\alpha$.

   $$\sum M = I\alpha \ \Rightarrow\ T_1R - T_2R = I\alpha$$

Siendo T_1 y T_2 las tensiones a las que se encuentran las cuerdas que sujetan las dos masas, R es el radio de la polea, I el momento de inercia de la polea y α la aceleración angular de la polea.

$$\sum F = ma \;\Rightarrow \begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a \\ T_2 - m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

Teniendo en cuenta $a = \alpha R$ y despejando en función de las masas y el radio,

$$\alpha = \frac{(m_1 - m_2)gR}{(m_1 + m_2)R^2 + I} = \frac{(m_1 - m_2)gR}{(m_1 + m_2)R^2 + 1/2(MR^2)} = 0,91\ rads^2$$

la aceleración para un punto de la periferia y para las masas será,

$$a = \alpha R = 0,45\ ms^{-2}$$