FÍSICA

2º Bachillerato

Interacción Gravitatoria
Campo Gravitatorio

Prof. Jorge Rojo Carrascosa

Índice general

Capítulo 1

INTERACCIÓN GRAVITATORIA. CAMPO GRAVITATORIO

Desde el principio de los tiempos, el cosmos ha atraído la atención de cualquier ser humano y más aún, la de los científicos. La observación del universo trajo consigo el estudio de las trayectorias de los planetas, la predicción de los eclipses, la orientación terrestre y marítima gracias al análisis de las posiciones de las estrellas y el desarrollo de un calendario fiable.

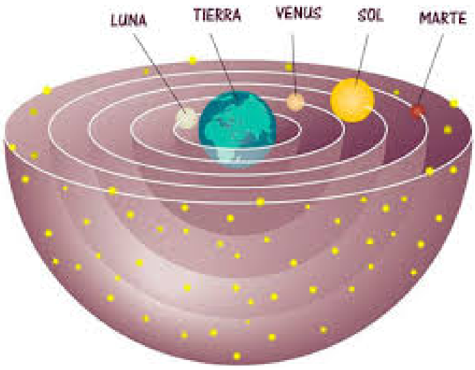
1.1. MODELOS GEOCENTRICO Y HELIOCENTRICO

La falta de cálculos cuantitativos fiables en la trayectoria de los planetas y en el paralaje anual de las estrellas (ángulo de visión de las estrellas), hicieron que el modelo geocéntrico perdominase durante siglos.

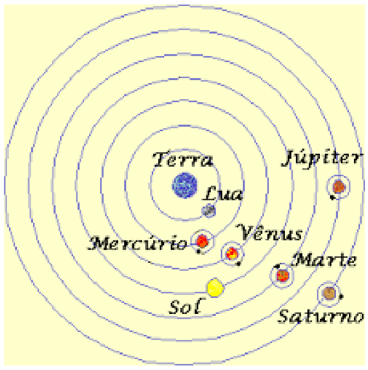
Así, para **Eudoxo** (S. V a.C.) la tierra permanecia inmóvil y los astros giraban alrededor de la Tierra en orbitas concéntricas, llego a representar 25 esferas donde la Luna era la más cercana y la más alejada, la de las estrellas fijas. **Aristoteles** aumentó el número de esferas a 55 y definió los primeros conceptos de mecánica.

En el S. II d.C., un astrónomo greco-egipcio llamado **Ptolomeo**, justificó el modelo geocéntrico calculando los movimientos planetarios y prediciendo la aparición de eclipses de Sol y Luna. Según esta teoría, las estrellas eran puntos en la esfera celeste que giraban alrededor de la Tierra manteniendo distancias fijas entre ellas.

Además, introdujo la *excentricidad* en la trayectoria de la Luna, desplazamiento del centro de la órbita respecto a la Tierra, e incorporó que la velocidad angular de la trayectoria lunar era constante respecto de un punto fuera de la trayectoria, denominado *ecuante*. Estos aspectos explicaban las diferencias de brillo y tamaño del Sol y la Luna y los cambios de velocidad del Sol a lo largo de la trayectoria.



Modelo geocéntrico



Órbitas deferentes

En cuanto al movimiento observado de zig zag de los planetas, llamado *retrógrado*, lo justificó utilizando un movimiento compuesto de dos rotaciones, el planeta giraba (*epiciclo*) alrededor de un punto que era en realidad el que rotaba con respecto a la Tierra, denominado *órbita deferente*. Pero para ajustarlo a las posiciones observadas, en algunos casos la deferente caía fuera del centro de la Tierra y en otros hubo que utilizar subepiciclos.

Copernico, a comienzos del siglo XVI, publicó el libro *Sobre las revoluciones de los cuerpos celestes*. En él, propuso un modelo heliocéntrico mucho más sencillo que el anterior para explicar el movimiento de los astros. Justificó el movimiento retrógrado de los planetas y eliminó la idea del paralaje, ya que la diferencia angular con la que podían observarse las estrellas era inapreciable al estar éstas tan alejadas de la Tierra.

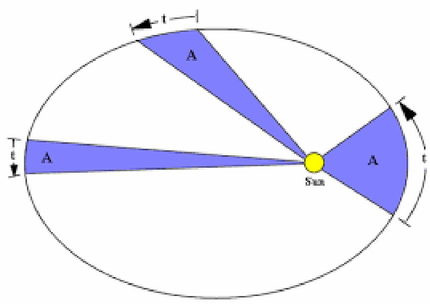
A finales del siglo S. XVI, **Galileo**, con ayuda de su telescopio confirmó que la Tierra no era el centro del Universo. Descubrio las fases de Venus, encontró infinitud de estrellas nunca vistas, observó la deformidad de la Luna y su superficie rugosa, e incluso, fue capaz de visualizar los satelites de Jupiter.

1.2. LAS LEYES DE KEPLER

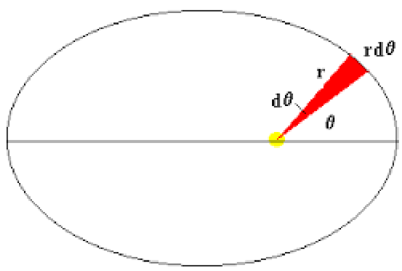
El astrónomo alemán **Johannes Kepler**, seguidor de Copernico, elaboró un modelo puramente cinemático del universo mucho más completo que el de Copernico. Gracias a las observaciones y anotaciones de su maestro Tycho Brahe, enuncio sus tres leyes:

1.2.1. PRIMERA LEY O LEY DE LAS ÓRBITAS

Los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol, estando éste, en uno de sus focos.



Primera Ley de Kepler



Segunda Ley de Kepler

El punto más cercano al Sol se denomina perihelio y el más alejado afelio.

1.2.2. SEGUNDA LEY O LEY DE LAS ÁREAS

El radio vector dirigido desde el Sol a los planetas, barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales. Esto implica que la velocidad del planeta en el afelio es menor que en el perihelio, $v_{afelio} < v_{perihelio}$. Además, implica que la velocidad areolar es constante.

Teniendo en cuenta el área de un triángulo (ver figura anterior), $A = \frac{1}{2}r^2 d\theta$, tenemos:

$$v_a = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega = cte$$

Donde ω es la velocidad angular del planeta.

1.2.3. TERCERA LEY O LEY DE LOS PERIÓDOS

Los cuadrados del periódo de revolución de los planetas alrededor del Sol son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores, o radios medios, de sus órbitas.

$$\boxed{T^2 = ka^3}$$

Siendo a la distancia media al Sol.

1.3. LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

En el siglo XVII, el físico y matemático **Isaac Newton** zanjó el problema de la estructura y dinámica del universo hasta la teoría de la relatividad de Einstein dos siglos más tarde.

Newton consideró que la fuerza que ejerce la Tierra sobre la Luna es la misma que la que ejerce sobre cualquier cuerpo de la superficie terrestre, la *atracción gravitatoria*. Extendió esta interacción a todos los planetas afirmando que la gravedad es un atributo de todos los cuerpos y es proporcional a la cantidad de materia contenido en cada uno.

Todos los cuerpos del universo se atraen con una fuerza central que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que les separa.

$$\boxed{F_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_{12}}$$

- G es una constante de proporcionalidad denominada constante de gravitación universal, no depende del medio y tiene como valor constante $6,67 \cdot 10^{11}\ Nm^2kg^{-2}$. Su cálculo no fue posible hasta 100 años más tarde; su determinación fue llevada a cabo por Cavendish mediante el empleo de una balanza de torsión.
- Su módulo es $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ y se expresa en el SI en N.
- La fuerza que ejerce 1 sobre dos es la misma que la que ejerce 2 sobre 1 pero con sentido contrario, es decir, actuan por parejas.
- El signo negativo indica que la fuerza gravitatoria tiene sentido contrario al vector unitario que une las dos masas, de ahí se deduce que tiene **caracter atractivo**.
- Es una fuerza central y por tanto, **conservativa**.
- Cumple con el **principio de superposición**. La fuerza ejercida sobre una masa será la suma vectorial del total las fuerzas ejercidas sobre ella.

1.3.1. JUSTIFICACIÓN DE LAS DOS PRIMERAS LEYES DE KEPLER

Al ser la fuerza gravitatoria una fuerza central, el momento angular, $\vec{L}$, se mantiene constante tanto en módulo, dirección y sentido. Por tanto, el movimiento del planeta tiene lugar en el plano y además, el planeta recorre la trayectoria siempre en el mismo sentido. La velocidad areolar, v_a, se relaciona con el momento angular como,

$$v_a = \frac{1}{2}\frac{\vec{L}}{m} \Rightarrow r_1 v_1 \sin\theta_1 = r_2 v_2 \sin\theta_2$$

En el caso de encontrarse el planeta en el perihelio o del afelio , $\theta = 90^o$ y por tanto,

$$\boxed{r_p v_p = r_a v_a}$$

1.3.2. JUSTIFICACIÓN DE LA TERCERA LEY DE KEPLER

Para un planeta de masa m que gira alrededor del Sol, de masa M_s, la fuerza gravitatoria provoca la aceleración centrípeta que hace describir al planeta un *movimiento circular uniforme*, así,

$$F_g = F_c \Rightarrow G\frac{M_s m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Dado que el periódo de revolución es $T = \frac{2\pi r}{v}$, despejando la velocidad y sustituyendo,

$$\boxed{T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_s}\right) r^3}$$

Siendo el término entre paréntesis la constante k, que halló Kepler. La constante toma un valor diferente en función del astro central.

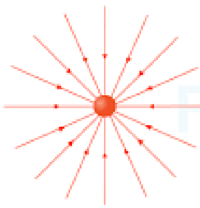
1.4. CAMPO GRAVITATORIO

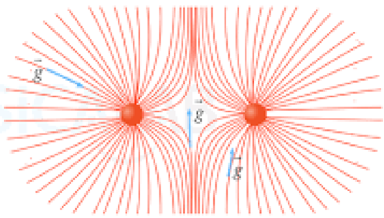
Se denomina **campo de fuerzas** a la perturbación que se produce en el espacio que rodea a un objeto provocado por alguna propiedad intrinseca de la partícula. Así, un cuerpo debido a su masa, crea a su alrededor un campo gravitatorio. Cada punto del campo de fuerzas viene caracterizado por dos magnitudes, una vectorial y otra escalar: la **intensidad del campo gravitatorio** y el **potencial gravitatorio** respectivamente.

La intensidad del campo gravitatorio, $\vec{g}$, generado por una masa m_1 a una distancia r de ella viene dado por,

$$\boxed{\vec{g} = -G\frac{m_1}{r^2}\vec{u}_r}$$

- El campo gravitatorio es un **vector** dirigido radialmente hacía la masa que lo genera.
- Su módulo es $g = G\frac{m_1}{r^2}$ y se expresa en el SI en Nkg^{-1}.
- La fuerza gravitatoria sobre una masa m_2, situada en un punto donde la intensidad del campo gravitatorio es $\vec{g}$, es $\vec{F} = m_2\vec{g}$.
- Se representa graficamente mediante **lineas de fuerza**. Por convenio, las líneas de fuerza se dibujan de tal forma que su densidad es proporcional a la intensidad del campo. Además, el campo gravitatorio, alrededor de una masa M, tiene las líneas de fuerza radiales y dirigidas hacia la masa M y las superficies de nivel o superficies equipotenciales del campo gravitatorio, debido a una masa M, tienen simetría esférica.





- El campo gravitatorio es **conservativo** al provenir de un campo de fuerzas central.
- Cumple el **principio de superposición**.

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + ... = \sum_i^N \vec{g}_i = -G\sum_i^N \frac{m_i}{r_i^2}\vec{u}_r$$

Si consideramos a la tierra como una superficie esférica homogénea, el campo gravitatorio terrestre en función de la distancia al centro de la Tierra vendrá dado por:

Interior tierra	**Exterior a la Tierra**
$\vec{g} = -G\frac{M_T}{R_T^2}r\vec{u}_r$	$\vec{g} = -G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}\vec{u}_r$

Donde r, es la distancia del centro de la Tierra a un punto del interior y h, es la altura sobre la superficie terrestre. El valor de g en el interior crece linealmente con la distancia al centro y en el exterior, decrece inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

1.4.1. ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

Como hemos visto, el campo gravitatorio es conservativo, esto implica que el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al desplazar una particula de masa m_2 entre dos puntos es independiente de la trayectoria, solo depende de las posiciones inicial y final.

$$\boxed{W_{i\to f} = \int_i^f \vec{F}d\vec{r} = -(E_p(f) - E_p(i)) = -\Delta E_p}$$

Donde se toma como valor cero de energía potencial el infinito. Por tanto, la energía potencial de una partícula m_2 colocada en un campo gravitatorio de otra masa m_1, a una distancia r, es agual al trabajo, cambiado de signo, que hace el campo gravitatorio para acercar la masa m_2 desde el infinito hasta r:

$$\boxed{E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}}$$

- Es una propiedad del sistema de dos partículas y es **nula en el infinito**.
- Es una magnitud escalar de unidades en el S.I. J.
- La energía potencial es **siempre negativa**.
- Es una magnitud escalar, por tanto, en un sistema de masas, se suma la contribución energética de cada una en el punto dado.

*Al acercar dos masas, la variación de energía potencial (**el trabajo**) es positivo, al separarlas es negativo ya que se realiza un trabajo en contra del campo gravitatorio.*

1.4.2. POTENCIAL GRAVITATORIO

Energéticamente podemos caracterizar el campo gravitatorio mediante el potencial gravitatorio. Se define el potencial gravitatorio como la energía potencial por unidad de masacolocada en ese punto.

$$\boxed{V = \frac{E_p}{m_2} = -G\frac{m_1}{r}}$$

- Solo depende de la masa m_1 que crea el campo y de la distancia.
- Es una magnitud escalar de unidades en el S.I. Jkg^{-1}.
- Una superficie equipotencial es aquella que tiene el mismo valor de potencial en todos sus puntos, no se pueden cortar y son perpendiculares a las líneas de campo. Cuando el campo está creado por una sólo masa puntual, éstas son esféricas con centro en la masa puntual. El trabajo en trasladar una masa por una superficie equipotencial es nulo.

1.4.3. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

La energía mecánica de una partícula que se mueve en el seno de un campo gravitatorio permanece constante durante toda su trayectoria.

$$\Delta E_m = 0 \Rightarrow E_c + E_p = cte$$

Por tanto,

$$E_c(i) + E_p(i) = E_c(f) + E_p(f)$$
$$\frac{1}{2}mv_i^2 - G\frac{Mm}{R_i} = \frac{1}{2}mv_f^2 - G\frac{Mm}{R_f}$$

1.5. APLICACIONES

1.5.1. VELOCIDAD DE ESCAPE

Se denomina velocidad de escape de un cuerpo, v_e, a la mínima velocidad que debe adquirir en su lanzamiento para que puede escapar del campo gravitatorio en el que se encuentra.

Como la energía mecánica se conserva, el cuerpo (satelite) al llegar al infinito tendrá una energía mecánica cero. Por tanto, para un lanzamiento desde la superficie terrestre:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = 0 \ \Rightarrow \ \boxed{v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2g_T R_T}}$$

Cuyo valor numérico es $11,2\ kms^{-1}$. Comopodemos observar, la velocidad de escape es independiente de la masa de la partíula que se lanza, sólo depende de la masa que genera el campo gravitatorio y de la distancia que existe entre ambos.

1.5.2. MOVIMIENTO ORBITAL. SATELITES ARTIFICIALES

Si consideramos el movimiento de un astro alrededor del Sol, su energía mecánica vendará dada por,

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

En función de la velocidad del astro, la energía puede ser positiva, negativa o cero.

1.5.2.1. ÓRBITA CIRCULAR

Si la energía total es menor que cero, $E_T < 0$, las trayectorias son cerradas (elipses o circulares). Al definir la $E_p = 0$ en el infinito, la energía cinética no es suficiente en ningún punto de la órbita para llevar al infinito a la partícula.

En el caso de la órbita circular, aplicando la segunda Ley de Newton la fuerza gravitatoria sería la responsable de la fuerza centrípeta,

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow mv^2 = \frac{GMm}{r}$$

Sustituyendo en la expresión de la energía mecánica, nos queda,

$$\boxed{E_m = -\frac{GMm}{2r} = \frac{E_p}{2}}$$

De la penúltima expresión matemática podemos deducir la **velocidad orbital** de un satélite despejando la velocidad de la última igualdad,

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

1.5.2.2. ÓRBITA PARABÓLICA

Cuando la energía total es cero, $E_T = 0$, la partícula se encuentra en reposo en el infinito. La curva es abierta y representa una parábola. Fisicamente se corresponde a una situación en la que se suelta una masa m_2 a una distancia de m_1 con una velocidad inicial que $E_c = E_p$.

1.5.2.3. ÓRBITA HIPERBÓLICA

Por último, si $E_T > 0$, la partícula puede llegar al infinito y tener aún energía cinética. La trayectoria es una curva abierta o hipérbola.

$$E_p(\infty) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_\infty^2 = E \Rightarrow v_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

1.5.2.4. ENERGÍA DE SATELIZACIÓN

Es la energía cinética que hay que comunicar a un satélite para ponerlo en una órbita circular de radio r alrededor de la tierra.

$$E_{co} + E_{po} = E_{orb} \;\Rightarrow E_{co} - G\frac{M_T m}{R_T} = -G\frac{M_T m}{2r}$$

$$\boxed{E_s = G M_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)}$$

Dependiendo de la órbita alrededor de la Tierra podemos tener:

Órbita	**Altitud**	**Misión**
LEO (Órbita baja)	250-1500 km	Observación, telecom,...
MEO (Órbita media)	10000-30000 km	Localización (GPS),...
GEO (Órbita Geoestacionaria)	35900 km	Telecom, Metereología...

1.5.2.5. TRABAJO EN UN CAMBIO ORBITAL

En el caso de un satélite que se encuentra en una órbita y queremos trasladarlo a otra superior, el trabajo motor que hay que realizar vendrá dado por:

$$W = (E_c + E_p)_f - (E_c + E_p)_i$$

$$W = \left(\frac{1}{2}mv_{orb}^2 - G\frac{M_T m}{(R_T + h)}\right)_f - \left(\frac{1}{2}mv_{orb}^2 - G\frac{M_T m}{(R_T + h)}\right)_i$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}G M_T m\left(\frac{1}{(R_T + h_i)} - \frac{1}{(R_T + h_f)}\right)}$$

1.6. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determina la masa de la Luna sabiendo que el módulo dela misión del Apolo XI, la orbitaba a una altura de 112 km de su superficie en 2 horas. Dato $R_L = 1740\ km$, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ nm^2kg^{-2}$.

   A artir de la tercera Ley de Kepler que relaciona el periódo orbital con el radio de la órbita y la masa, podemos despejar y hallar el valor de la masa lunar.

   $$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_L}r^3 \ \Rightarrow \ M_L = \frac{4\pi^2}{GT^2}(R_L + h)^3 = 7,2 \cdot 10^{22}\ kg$$

2. La masa de la Luna es 1/81 de la masa de la Tierra y su radio es 1/4 del radio de la Tierra. Calcula lo que pesará en la superficie de la Luna una persona que tiene una masa de 70 kg. Dato: g=9,8 ms^{-2}

   Aplicando la definición de la Ley de Gravitación Universal y teniendo en cuenta las relaciones entre la luna y la Tierra,

   $$P_L = G\ \frac{m_L m_h}{R_L^2} = G\ \frac{\left(\frac{m_T}{81}\right) m_h}{\left(\frac{R_T}{4}\right)^2} = \frac{16}{81}\ G\ \frac{m_T m_h}{R_T^2} = \frac{16}{81}\ g_{0,T}\ m_h$$

   $$\boxed{P_L = 135,5\ N}$$

3. Dos masas puntuales de 2 kg están situadas en los puntos A(-5,0) m y B(5,0) m. Calcula el campo gravitatorio en el punto C(0,5) m.

   Para calcular el campo gravitatorio en C aplicamos el principio de superposición. Las componentes horizontales se anulan por tener distinto sentido y el mismo valor pero no así las verticales, que salen reforzadas. Calculamos las componentes verticales teniendo en cuenta que forman un ángulo de 45º y que tanto las distancias y las masas son iguales.

   $$g_{1y} = g_{2y} = g_1 \cos\alpha = G\frac{m_1}{r_1^2}\cos\alpha = 1,9 \cdot 10^{-12}\ ms^{-2}$$

   $$g_y = g_{1y} + g_{2y} = 3,8 \cdot 10^{-12}\ ms^{-2}$$

   Expresandolo de forma vectorial,

   $$\vec{g}_y = -3,8 \cdot 10^{-12}\vec{j}\ ms^{-2}$$

4. Una esfera de 25 kg está situada en el origen de coordenadas y otra de 15 kg en A(3,0) m. Calcula el trabajo efectuado al trasladar la esfera de 15 kg hasta el punto B(4,0) m.

   El trabajo necesario será equivalee a la diferencia de potencial entre sus posiciones inicial y final. Por tanto, hallamos el potencial que genera la esfera de 25 kg en el punto A y B.

   $$V_A = -G\frac{m_1}{r_{1A}} = -5,6 \cdot 10^{-10}\ Jkg^{-1} \qquad V_B = -G\frac{m_1}{r_{1B}} = -4,2 \cdot 10^{-10}\ Jkg?{-1}$$

   $$W = -\Delta E_p = -m_2(V_A - V_B) = -2,1 \cdot 10^{-9}\ J$$